

初心者向けテキスト：制御

## MATLAB を利用した制御系設計

### --- 応用編 ---

発行：2003年7月（1997年初版作成）

著者：加納 学

京都大学大学院工学研究科化学工学専攻

連絡先：

E-mail: [kano@cheme.kyoto-u.ac.jp](mailto:kano@cheme.kyoto-u.ac.jp)

<http://www-pse.cheme.kyoto-u.ac.jp/~kano/>

Copyrights (C) 1997-2003 by Manabu KANO. All rights reserved.

本資料の内容の一部あるいは全部を無断で転載，複製，複写することを禁じます．

また，本資料の間違いなどによって生じた不利益などに対して，著者は一切責任を負いません．

MATLAB と SIMULINK は MATH WORKS 社の登録商標です．

## 第 1 章 プロセス伝達関数の同定

あるプロセスを制御しようとする場合に必要な作業をまとめると、以下のようになる。

1. 操作量と制御量とを決定する。
2. 操作量と制御量との間の動特性を求める。
3. コントローラを設計する。
4. 制御性能を評価する。

本章では、作業 2 について述べる。プロセスの動特性を表すモデルの構築方法は、物質収支や熱収支などに基づいて物理モデルを構築する方法と、プロセスの入出力データに基づいてブラックボックスモデルを構築する方法とに大別される。ここでは、プロセスの入出力データを用いて、伝達関数モデルを導出する方法について述べる。

### 1.1.1. ステップ応答実験

伝達関数モデルを求める最も簡便な方法は、操作量をステップ状に変化させ、その応答波形から伝達関数を求めるというものである。多くのプロセスは 1 次遅れ + むだ時間系

$$P(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-Ls} \quad (1.1)$$

として実用上十分な精度で近似できることが知られているので、ステップ応答実験で得られる応答波形から、3つのパラメータ  $K, T, L$  を求めればよい。ここで、 $K$  は定常ゲイン、 $T$  は時定数、 $L$  はむだ時間である。これらのパラメータを求めるのに最も簡単な方法は、応答波形から直接パラメータを読みとる方法である。式(1.1)で与えられる伝達関数のステップ応答は図 1.1 のようになる。

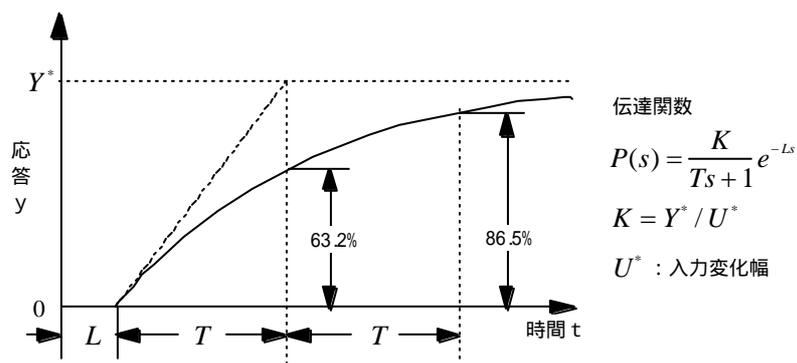


図 1.1 ステップ応答

したがって、ステップ応答実験から得られる応答波形に基づいて、パラメータ  $K, T, L$  を決定することができる。

## [ 演習問題 1 ]

図 1.2 に示すようなステップ応答実験の結果が得られた。この結果から、プロセスの伝達関数モデルを構築しなさい。ただし、プロセスは式(1.1)の伝達関数で近似できるものとする。

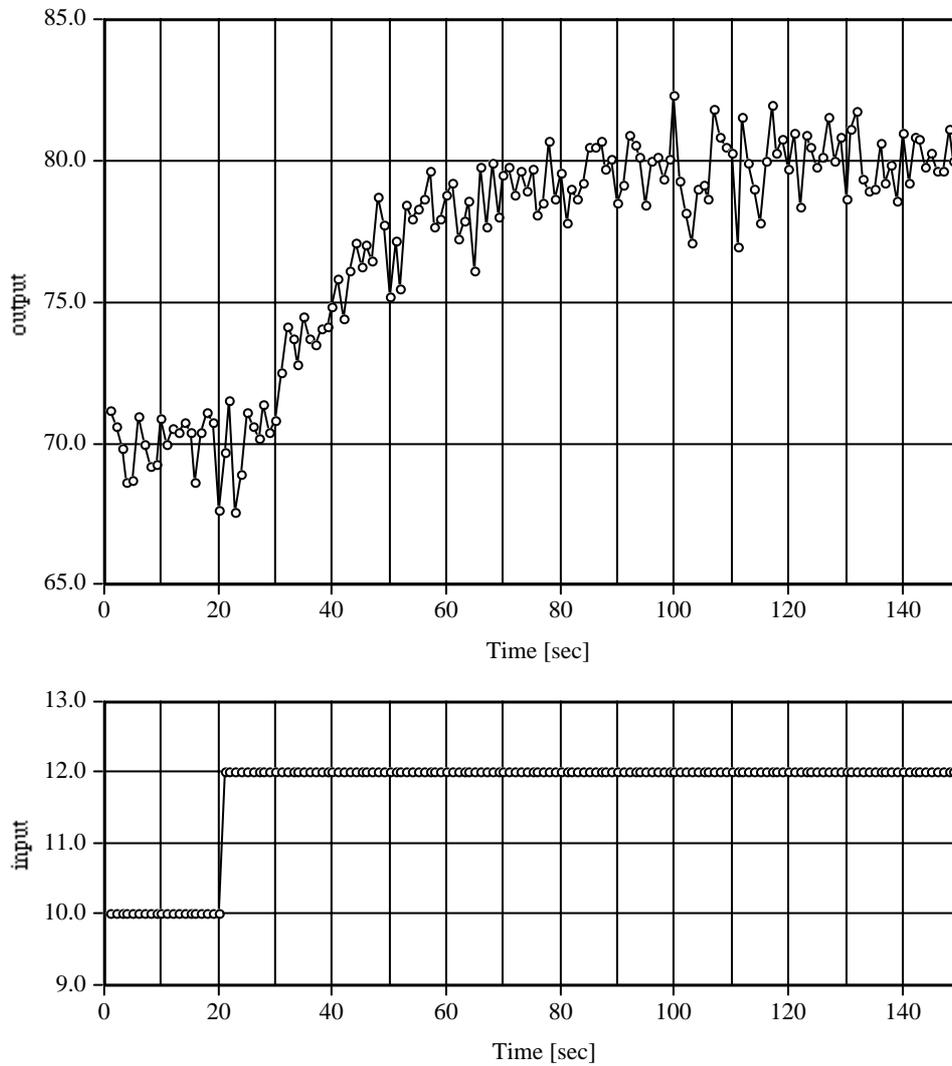


図 1.2 ステップ応答データ

## 第2章 PIコントローラ的设计

### 2.1. 目標値への追従特性に基づく方法

PID 制御の調整則は数多く報告されている．ここでは，目標値から制御量への閉ループ伝達関数が規範モデルで近似されるように，PI 制御パラメータを調整する方法について説明する．

まず，次の規範モデルを与える．

$$M(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^2} \quad (2.1)$$

これは 2 次の二項係数標準形であり，応答の振動を抑えたい(オーバーシュートをなくしたい)場合に利用される規範モデルである．なお， $\tau$  はチューニングパラメータであり，応答の速さの指標となる．この規範モデルの逆数をとると，

$$\frac{1}{M(s)} = 1 + 2\tau s + \tau^2 s^2 \quad (2.2)$$

を得る．

一方，目標値から制御量への閉ループ伝達関数は

$$H_R(s) = \frac{CP}{1 + CP} \quad (2.3)$$

で与えられる．今， $1/H_R(s)$  のマクローリン展開

$$\frac{1}{H_R(s)} = \eta_0 + \eta_1 s + \eta_2 s^2 + \dots \quad (2.4)$$

を式(2.2)で近似することを考える．プロセスと PI コントローラの伝達関数がそれぞれ

$$P(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-Ls} \quad (2.5)$$

$$C(s) = \frac{K(s)}{s} = \frac{K_I + K_P s}{s} \quad (2.6)$$

で与えられる場合，

$$\frac{1}{H_R(s)} = 1 + \frac{s}{K(s)P(s)} \quad (2.7)$$

となることから，

$$\eta_0 = \frac{1}{H_R(0)} = 1 \quad (2.8)$$

$$\eta_1 = \left[ \frac{d}{ds} \frac{1}{H_R} \right]_{s=0} = \frac{1}{K(0)P(0)} = \frac{1}{K_I K} \quad (2.9)$$

$$\eta_2 = \left[ \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{H_R} \right]_{s=0} = \frac{1}{K(0)} \left[ \frac{d}{ds} \frac{1}{P} \right]_{s=0} + \frac{1}{P(0)} \left[ \frac{d}{ds} \frac{1}{K} \right]_{s=0} = \frac{T+L}{K_I K} - \frac{K_P}{K_I^2 K} \quad (2.10)$$

を得る．ここで，規範モデルと閉ループ伝達関数の係数を比較すると，

$$2\tau = \frac{1}{K_I K} \quad (2.11)$$

$$\tau^2 = \frac{T+L}{K_I K} - \frac{K_P}{K_I^2 K} \quad (2.12)$$

より,

$$K_I = \frac{1}{2\tau K} \quad (2.13)$$

$$K_P = \frac{1}{4\tau K} \{2(T+L) - \tau\} \quad (2.14)$$

となる.

### [ 演習問題 2 ]

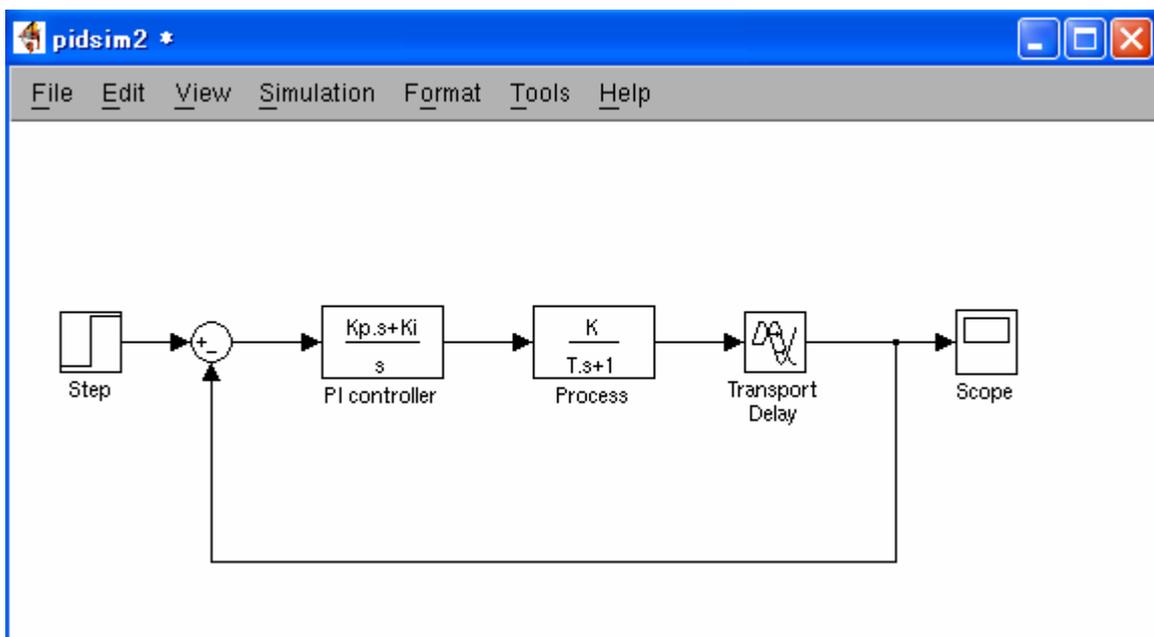
演習問題 1 で求めたプロセスの伝達関数を制御対象として, 2.1 節の方法を用いて PI コントローラを設計しなさい. ただし, はチューニングパラメータとして残しておくこと.

### [ 演習問題 3 ]

演習問題 1 で求めたプロセスの伝達関数を制御対象として, 演習問題 2 で求めた PI 制御を用いる制御系を考える. ステップ状目標値変更に対する, この制御系の制御応答を計算しなさい. なお, シミュレーションには SIMULINK を用いるものとする.

### [ 解答例 ]

PI 制御系を SIMULINK 上で表現すると次のようになる.



PID 制御系

## 2.2. 外乱に対する応答特性に基づく方法

ここでは、外乱から制御量への閉ループ伝達関数が規範モデルで近似されるように、PI 制御パラメータを調整する方法について説明する。

目標値から制御量への閉ループ伝達関数に対しては、式(2.1)の規範モデルを与えた。この規範モデルの満たすべき条件として、定常ゲインが1であることが挙げられる。これは、定常状態において制御量を設定値に一致させるためである。一方、外乱から制御量への閉ループ伝達関数の規範モデルは、定常状態において外乱の影響が制御量に現れないように、定常ゲインがゼロでなければならない。このため、次のような規範モデルを与える。

$$\frac{sM(s)}{K_I} = \frac{s}{K_I} \cdot \frac{1}{(\tau s + 1)^2} \quad (2.15)$$

この規範モデルにリセット率（積分時間の逆数） $K_I$ が含まれている理由はすぐに明らかになる。なお、 $K_I$ はチューニングパラメータであり、応答の速さの指標となる。この規範モデルの逆数をとると、次式を得る。

$$\frac{K_I}{sM(s)} = \frac{K_I}{s} \left( \frac{1}{\tau s + 1} \right)^2 \quad (2.16)$$

さて、外乱がプロセスの入力側に加わる場合を想定すると、外乱から制御量への閉ループ伝達関数は

$$H_w(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (2.17)$$

で与えられる。今、 $1/H_w(s)$ のマクローリン展開を式(2.16)で近似することを考える。プロセスとPIコントローラの伝達関数がそれぞれ

$$P(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-Ls} \quad (2.18)$$

$$C(s) = \frac{K(s)}{s} = \frac{K_I + K_P s}{s} \quad (2.19)$$

で与えられる場合、 $1/P(s)$ のマクローリン展開は

$$\frac{1}{P(s)} = \frac{Ts + 1}{K} e^{Ls} \quad (2.20)$$

となることから、

$$\frac{1}{H_w(s)} = C + \frac{1}{P} = \frac{K_I}{s} \left( \frac{1}{\tau s + 1} \right)^2 \quad (2.21)$$

を得る。式(2.16)、(2.21)の係数を比較すると、

$$2\tau = \underline{\hspace{10em}} \quad (2.22)$$

$$\tau^2 = \underline{\hspace{10em}} \quad (2.23)$$

となるので、これより

$$K_I = \underline{\hspace{10em}} \quad (2.24)$$

$$K_P = \underline{\hspace{10em}} \quad (2.25)$$

を得る。

[ 演習問題 4 ]

演習問題 1 で求めたプロセスの伝達関数を制御対象として、2.2 節の方法を用いて PI コントローラを設計しなさい。ただし、 $\tau$  はチューニングパラメータとして残しておくこと。

[ 演習問題 5 ]

演習問題 1 で求めたプロセスの伝達関数を制御対象として、演習問題 4 で求めた PI 制御を用いる制御系を考える。ステップ状外乱に対する、この制御系の制御応答を計算しなさい。なお、シミュレーションには SIMULINK を用いるものとする。

おわり