工業数学F2
#1 フーリエ解析って？

京都大学　加納　学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻
Human Systems Lab., Dept. of Systems Science
Graduate School of Informatics, Kyoto University

Outline

- フーリエ級数展開
- 三角関数の復習と直交性
- フーリエ係数の導出
- 一般の周期関数のフーリエ級数展開
- フーリエ解析
- フーリエ変換の応用例（Computed Tomography）
- 宿題

フーリエ（Fourier）

3

「任意の関数は，三角関数の級数で表すことができる」
（熱の解析的理論，1822）

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)
ジャン・バティスト・ジョゼフ・フーリエ男爵

1768年 オセール（フランス）に生まれる.
1795年 エコール・ポリテクニーク（高等理工科学校）の助講師となる.
1798年 ナポレオンのエジプト遠征に従い，カイロ大学幹事となる.
1802年 イゼール県知事に任命され，グルノーブルに赴任する.
1822年 著書「熱の解析的理論」が出版される.
1827年 ラプラスの後任としてエコール・ポリテクニーク理事長となる.
1830年 パリで病没. 63歳.

演習

4

次の関数のグラフを描いてみよう.
（雰囲気さえ掴めればよい）

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x \quad (0 \le x \le 2\pi)$$

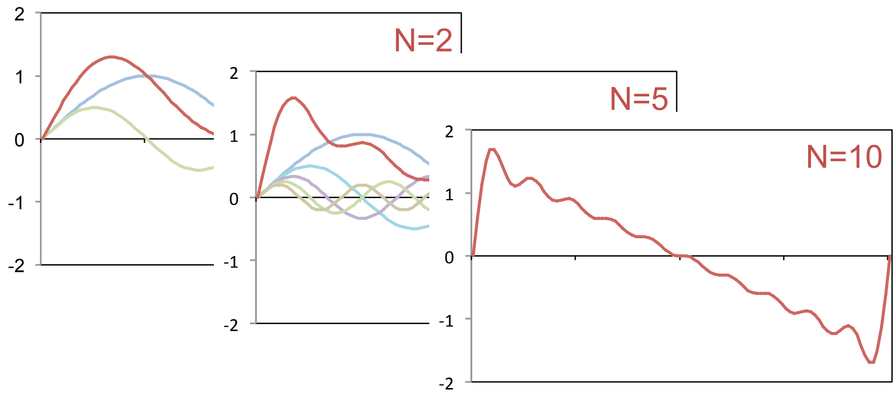
$$g(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x \quad (0 \le x \le 2\pi)$$

5

sin関数の和(1)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sin nx$$

のこぎり（鋸歯状）波

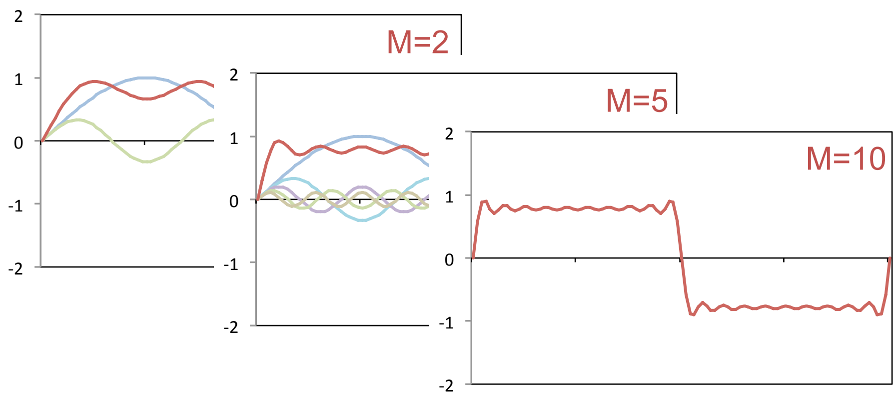


6

sin関数の和(2)

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2m-1} \sin{(2m-1)x}$$

方形（矩形）波



フーリエ級数展開

7

周期 2π の周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

フーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

いきなり答えを示しています．これから，なぜ？を考えましょう．

フーリエ級数展開の例(1)

8

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < \pi) \\ 0 & (\pi \le x < 2\pi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{-1}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{-1}{n\pi}((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & (n : \text{odd numbers}) \\ 0 & (n : \text{even numbers}) \end{cases} \end{aligned}$$

9

フーリエ級数展開の例(2)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < \pi) \\ 0 & (\pi \le x < 2\pi) \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= ?$$

では，自力で求めてみましょう！

10

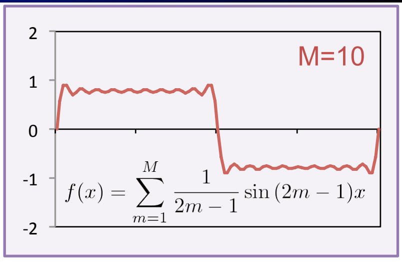
フーリエ級数展開の例(3)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < \pi) \\ 0 & (\pi \le x < 2\pi) \end{cases}$$

フーリエ級数展開の例(4)

11

ここまでの結果をまとめると



$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < \pi) \\ 0 & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases}$$

フーリエ級数展開

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & (n : \text{odd numbers}) \\ 0 & (n : \text{even numbers}) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin(2m-1)x$$

πとフーリエ級数展開

12

$$f(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin \frac{(2m-1)\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m-1}$$

$$\frac{\pi}{4} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Outline

13

- フーリエ級数展開
- 三角関数の復習と直交性
- フーリエ係数の導出
- 一般の周期関数のフーリエ級数展開
- フーリエ解析
- フーリエ変換の応用例（Computed Tomography）
- 宿題

三角関数の復習(1)

14

加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

三角関数の復習(2)

15

$$\int_0^{2\pi} \cos mx dx = \left[\frac{\sin mx}{m}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx dx = \left[-\frac{\cos mx}{m}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 2mx + 1) dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2mx) dx = \pi$$

三角関数の復習(3)

16

$\mathrm{m} \neq n$ のとき

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos (m+n)x + \cos (m-n)x\} dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos (m-n)x - \cos (m+n)x\} dx = 0$$

三角関数の復習(4)

17

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = \quad ?$$

では，自力で求めてみましょう！

関数の直交

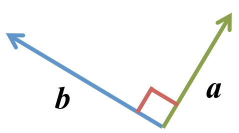
18

周期 2π の関数 $f(x)$ と $g(x)$ は

内積 $$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = 0$$

のとき直交する．（ $f(x) \neq g(x)$ ）

参考： ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は内積 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 0$ のとき直交する．



三角関数系の直交性

19

三角関数系の直交性

1. 自分と異なる三角関数系の関数との内積が 0 .
2. 自分自身との内積が 0 でない.

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos mx dx = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin mx dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 mx dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 mx dx = \pi$$

Outline

20

- フーリエ級数展開
- 三角関数の復習と直交性
- フーリエ係数の導出
- 一般の周期関数のフーリエ級数展開
- フーリエ解析
- フーリエ変換の応用例（Computed Tomography）
- 宿題

フーリエ係数の導出(1)

21

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

関数 $f(x)$ に $\cos mx$ をかけて積分する.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}(a_n \cos nx \cos mx dx + b_n \sin nx \cos mx)dx$$
$$= \pi a_m$$

フーリエ係数 $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$

フーリエ係数の導出(2)

22

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

では，自力で求めてみましょう！

フーリエ係数 $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$

Outline

- フーリエ級数展開
- 三角関数の復習と直交性
- フーリエ係数の導出
- 一般の周期関数のフーリエ級数展開
- フーリエ解析
- フーリエ変換の応用例（Computed Tomography）
- 宿題

一般の周期関数のフーリエ級数展開

周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

フーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

フーリエ解析

25

「任意の関数は，三角関数の級数で表すことができる」

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

関数 $f(x)$ をフーリエ変換（フーリエ級数展開）することで，その関数を構成している周波数成分とその強度がわかる．

周波数 $\omega_n = \dfrac{n}{2\pi}$　強度 $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Outline

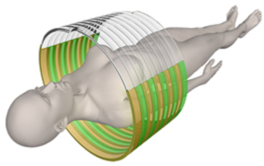
26

- フーリエ級数展開
- 三角関数の復習と直交性
- フーリエ係数の導出
- 一般の周期関数のフーリエ級数展開
- フーリエ解析
- フーリエ変換の応用例（Computed Tomography）
- 宿題

Computed Tomography（CT）

27

CT（コンピュータ断層撮影）装置は，X線を放出する管球と検出器が対となり，検査対象の周囲を回転しながらX線吸収率を計測し，コンピュータを用いて対象内部の断層画像を再構成する.



低CT値（肺気腫）領域の計測

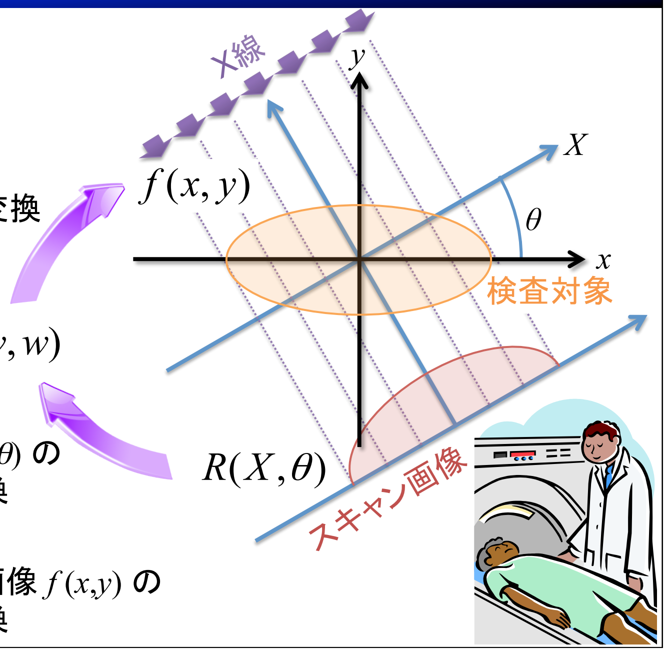
（東芝メディカルシステムズ）
http://www.toshiba-medical.co.jp/tmd/products/ct/index.html

CT（断層撮影）とフーリエ変換

28

2次元フーリエ逆変換

$G(v,w)$



スキャン画像 $R(X,\theta)$ の
1次元フーリエ変換

||

検査対象の断層画像 $f(x,y)$ の
2次元フーリエ変換

Outline

- フーリエ級数展開
- 三角関数の復習と直交性
- フーリエ係数の導出
- 一般の周期関数のフーリエ級数展開
- フーリエ解析
- フーリエ変換の応用例（Computed Tomography）
- 宿題

宿題

1. 自分の好きなソフトウェアを用いて，$M = 2, 5, 10$ のときの関数 $f(x)$ のグラフを描け．

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos{(2m-1)x}$$

2. 別紙のアンケートに回答せよ．