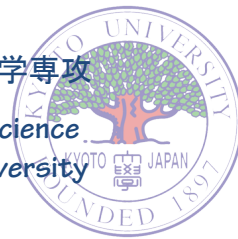


工業数学F2

#2 フーリエ級数に展開する

京都大学 加納 学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻
Human Systems Lab., Dept. of Systems Science
Graduate School of Informatics, Kyoto University



Outline

2

- 三角関数の基本
- 関数の直交
- フーリエ係数の導出
- 偶関数と奇関数
- フーリエ係数計算のコツ
- フーリエ余弦級数展開と正弦級数展開
- 宿題

フーリエ級数

3



Fourier (1768–1830)

「任意の関数は、三角関数の級数で表すことができる」

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

フーリエ級数展開は、性質の不明な関数を、性質の明らかな三角関数の重ね合わせで表す方法である。

三角関数の基本性質

4



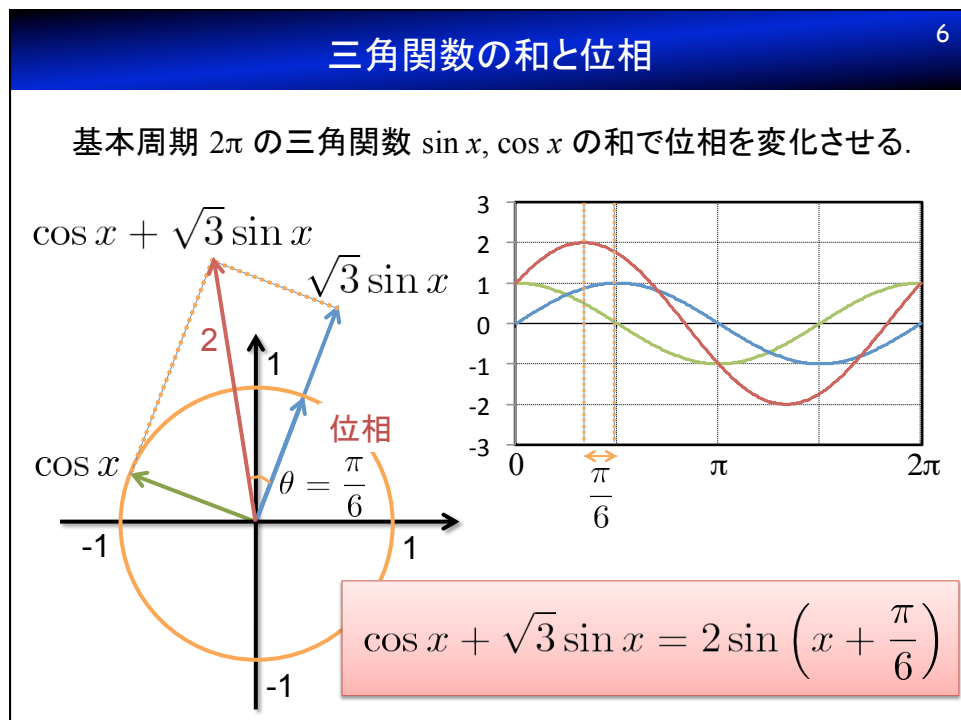
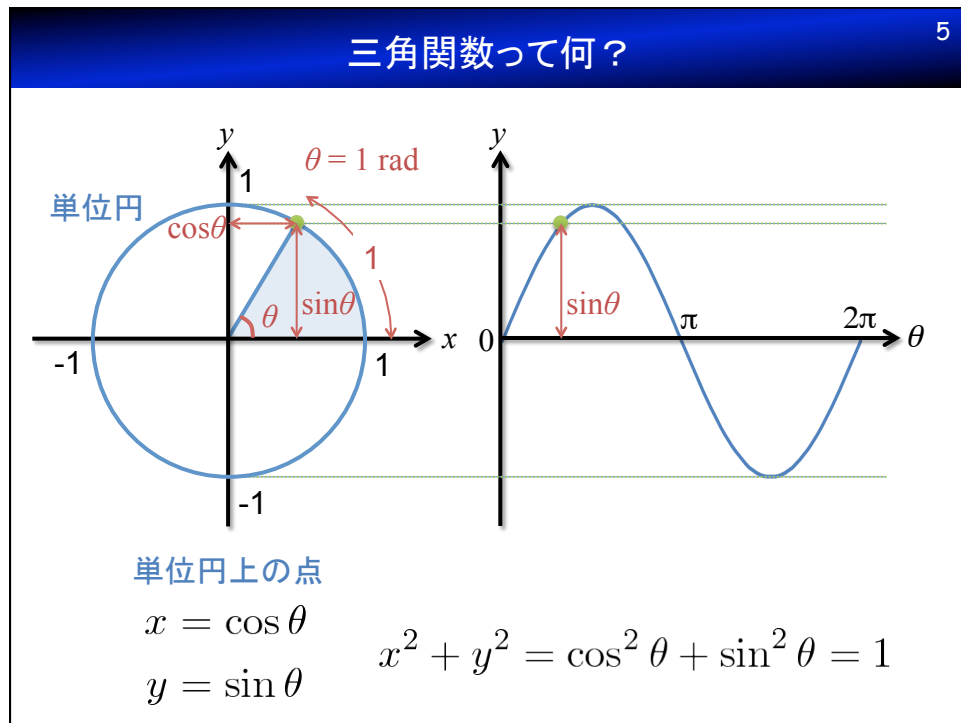
つまり、三角関数の性質を熟知していることが前提です。

三角関数 $\sin x, \cos x$ は基本周期 2π の周期関数である。

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + 2n\pi) = \cos x$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$



周期関数の和と積

7

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が共に周期 T の周期関数であるとき、
その線形結合 $h(x)$ も周期 T の周期関数となる。

$$\begin{aligned} h(x+T) &= af(x+T) + bg(x+T) \\ &= af(x) + bg(x) = h(x) \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が共に周期 T の周期関数であるとき、
その積 $h(x)$ も周期 T の周期関数となる。

$$\begin{aligned} h(x+T) &= f(x+T)g(x+T) \\ &= f(x)g(x) = h(x) \end{aligned}$$

周期関数の積分

8

関数 $f(x)$ が周期 T の周期関数であるとき、
任意の定数 c に対して次式が成り立つ。

$$\int_0^T f(x)dx = \int_c^{c+T} f(x)dx$$



1周期分だけ積分するのだから当然です。

Outline

9

- 三角関数の基本
- 関数の直交
- フーリエ係数の導出
- 偶関数と奇関数
- フーリエ係数計算のコツ
- フーリエ余弦級数展開と正弦級数展開
- 宿題

関数の直交

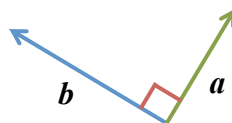
10

周期 2π の関数 $f(x)$ と $g(x)$ は

$$\text{内積} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = 0$$

のとき直交する. ($f(x) \neq g(x)$)

参考: ベクトル a と b は内積 $a^T b = 0$ のとき直交する.



三角関数系の直交性

11

三角関数系 $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos mx dx = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin mx dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 mx dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 mx dx = \pi$$

Outline

12

- 三角関数の基本
- 関数の直交
- フーリエ係数の導出
- 偶関数と奇関数
- フーリエ係数計算のコツ
- フーリエ余弦級数展開と正弦級数展開
- 宿題

フーリエ係数の導出(1)

13

三角関数系の直交性を利用すると、フーリエ係数が求まる。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

関数 $f(x)$ に $\cos mx$ をかけて積分する。

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx = \int_0^{2\pi} a_m \cos^2 mx dx = \pi a_m$$

フーリエ係数 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$

フーリエ係数の導出(a_0)

14

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

関数 $f(x)$ に $\cos mx$ ($m=0$) をかけて積分する。

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos 0x dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0$$

フーリエ係数 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos 0x dx$

a_0 を2で割ると
辻褄が合う

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

フーリエ係数の導出(2)

15

三角関数系の直交性を利用すると, フーリエ係数が求まる.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

関数 $f(x)$ に $\sin mx$ をかけて積分する.

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx = \int_0^{2\pi} b_m \sin^2 mx dx = \pi b_m$$

$$\text{フーリエ係数 } b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

Outline

16

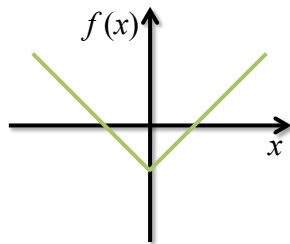
- 三角関数の基本
- 関数の直交
- フーリエ係数の導出
- 偶関数と奇関数
- フーリエ係数計算のコツ
- フーリエ余弦級数展開と正弦級数展開
- 宿題

偶関数と奇関数

17

偶関数

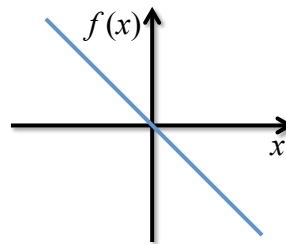
$$f(-x) = f(x)$$



$$f(x) = |ax| + b$$

奇関数

$$f(-x) = -f(x)$$



$$f(x) = ax$$

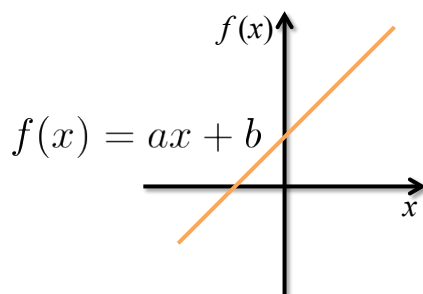
偶関数と奇関数の性質(1)

18

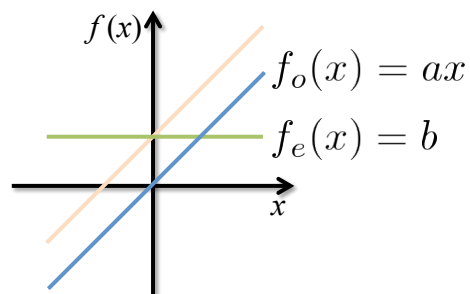
任意の関数 $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$

$f(x)$ の偶関数部分 $f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

$f(x)$ の奇関数部分 $f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$



$$f(x) = ax + b$$



$$f_o(x) = ax$$

$$f_e(x) = b$$

偶関数と奇関数の性質(2)

19

● 積に関する性質

偶関数 × 偶関数 = 偶関数

$$f_e(-x)f_e(-x) = f_e(x)f_e(x)$$

奇関数 × 奇関数 = 偶関数

$$f_o(-x)f_o(-x) = (-f_o(x))(-f_o(x)) = f_o(x)f_o(x)$$

偶関数 × 奇関数 = 奇関数

$$f_e(-x)f_o(-x) = f_e(x)(-f_o(x)) = -f_e(x)f_o(x)$$

偶関数 $f_e(-x) = f_e(x)$

奇関数 $f_o(-x) = -f_o(x)$

● 積分に関する性質

$$\int_{-c}^c f_e(x)dx = 2 \int_0^c f_e(x)dx$$

$$\int_{-c}^c f_o(x)dx = 0$$

演習

20

$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ の偶関数部分と奇関数部分を求めよ.

ヒント(和積の公式)

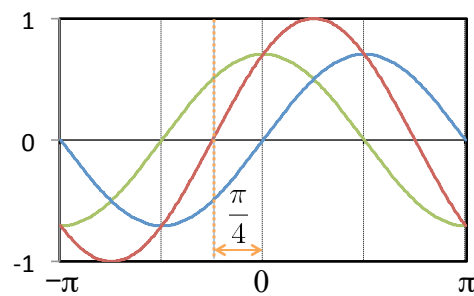
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

演習

21

基本周期 2π の三角関数
 $\sin x, \cos x$ の和で位相を
変化させる.



Outline

22

- 三角関数の基本
- 関数の直交
- フーリエ係数の導出
- 偶関数と奇関数
- フーリエ係数計算のコツ
- フーリエ余弦級数展開と正弦級数展開
- 宿題

フーリエ係数計算のコツ(1)

23

偶関数 $f_e(x)$ のフーリエ係数は $b_n = 0$ である.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$



偶関数 $f_e(x)$ と奇関数 $\sin nx$ の積は奇関数.

そして, $\int_{-c}^c f_o(x) dx = 0$

フーリエ係数計算のコツ(2)

24

奇関数 $f_o(x)$ のフーリエ係数は $a_n = 0$ である.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$



奇関数 $f_o(x)$ と偶関数 $\cos nx$ の積は奇関数.

そして, $\int_{-c}^c f_o(x) dx = 0$

フーリエ係数の線形性

25

周期 2π の周期関数 $f(x)$ と $g(x)$ のフーリエ係数をそれぞれ $a_n(f), b_n(f)$ と $a_n(g), b_n(g)$ とする.



関数 $cf(x)+dg(x)$ のフーリエ係数は $ca_n(f)+da_n(g), cb_n(f)+db_n(g)$ となる.

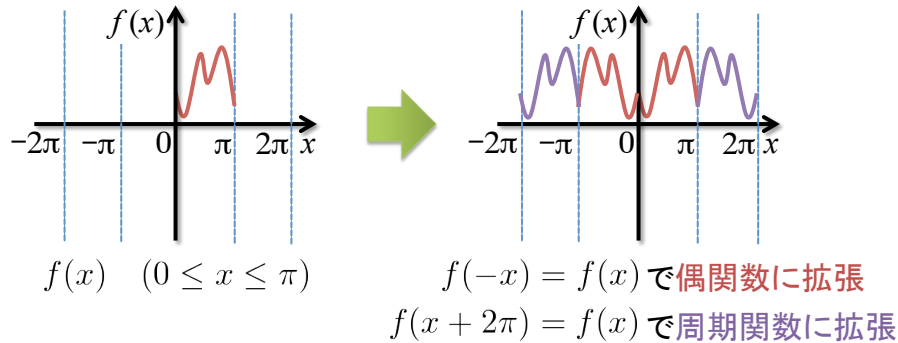
Outline

26

- 三角関数の基本
- 関数の直交
- フーリエ係数の導出
- 偶関数と奇関数
- フーリエ係数計算のコツ
- フーリエ余弦級数展開と正弦級数展開
- 宿題

フーリエ余弦級数展開

27



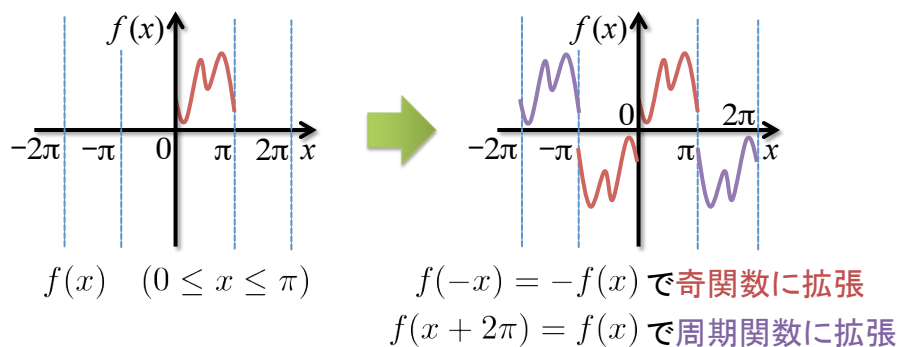
フーリエ余弦展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

フーリエ正弦級数展開

28



フーリエ正弦展開

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

フーリエ余弦級数展開の例

29

$$f(x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx & a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos 0x dx = \pi \\ &= \frac{2}{\pi n} \left([x \sin nx]_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx dx \right) \\ &= \frac{2(\cos n\pi - 1)}{\pi n^2} \\ &= \begin{cases} 0 & (n : \text{even numbers}) \\ -\frac{4}{\pi n^2} & (n : \text{odd numbers}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right)$$

π に関する公式

30

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right)$$

 $x = 0$

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right) = 0$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

フーリエ正弦級数展開の例

31

$$f(x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = ?$$

では、自力で求めてみましょう！

フーリエ正弦級数展開の例

32

$$f(x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

π に関する公式

33

$$f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

では, 自力で求めてみましょう!

π に関する公式

34

$$f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

Outline

35

- 三角関数の基本
- 関数の直交
- フーリエ係数の導出
- 偶関数と奇関数
- フーリエ係数計算のコツ
- フーリエ余弦級数展開と正弦級数展開
- 宿題

宿題

36

1. 次の関数のフーリエ級数展開を求めよ.

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

ただし, $f(x + 2\pi) = f(x)$ によって周期的に拡張する.

2. 前問のフーリエ級数展開において $x = \pi$ として得られる級数の公式を示せ.

