工業数学F2

#3 フーリエ級数を複素形式にする

京都大学　加納　学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻

Human Systems Lab., Dept. of Systems Science
Graduate School of Informatics, Kyoto University

復習1 : フーリエ級数

2

Fourier (1768–1830)

任意の関数は，三角関数の級数で表すことができる

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

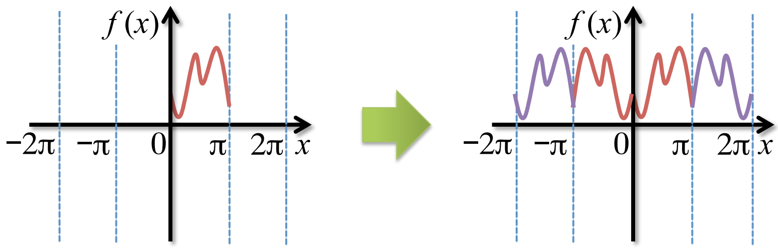
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

フーリエ級数展開は，性質の不明な関数を，性質の明らかな三角関数の重ね合わせで表す方法である．

復習2：フーリエ余弦級数展開

3



$f(x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$

$f(-x) = f(x)$ で偶関数に拡張

$f(x+2\pi) = f(x)$ で周期関数に拡張

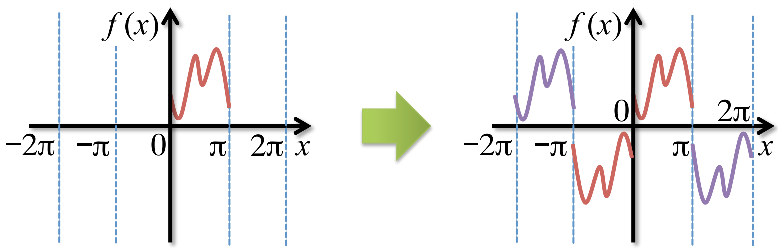
フーリエ余弦展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

復習3：フーリエ正弦級数展開

4



$f(x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$

$f(-x) = -f(x)$ で奇関数に拡張

$f(x+2\pi) = f(x)$ で周期関数に拡張

フーリエ正弦展開

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Outline

5

- 複素フーリエ級数展開
- スペクトル
- 複素フーリエ級数の微分積分
- 宿題

オイラーの公式

6

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler）
（1707-1783 ）

$f(x) = (\cos x - i \sin x)e^{ix}$ を微分すると，

$$\frac{df(x)}{dx} = (-\sin x - i \cos x)e^{ix} + (\cos x - i \sin x)ie^{ix} = 0$$

であるから，$f(x)$ は定数関数であり，$f(x) = f(0)$ が成り立つ．

$$(\cos x - i \sin x)e^{ix} = f(x) = f(0) = (\cos 0 - i \sin 0)e^{i0} = 1$$

の両辺に $\cos x + i \sin x$ を掛けると，証明のできあがり！

ド・モアブルの公式

7

オイラーの公式

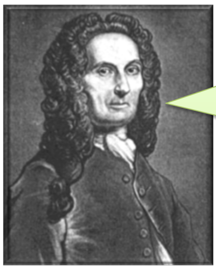
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

ド・モアブルの公式

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$



アブラーム・ド・モアブル（Abraham de Moivre）
（1667-1754）

複素フーリエ級数

8

任意の関数は，三角関数の級数で表すことができる．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ド・モアブルの公式

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \underbrace{\frac{a_n - ib_n}{2}}_{c_n} e^{inx} + \underbrace{\frac{a_n + ib_n}{2}}_{c_{-n}} e^{-inx} \right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

複素フーリエ級数

実フーリエ係数と複素フーリエ係数

9

複素フーリエ級数 $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

複素フーリエ係数 $$c_{\pm n} = \frac{a_n \mp i b_n}{2}$$

実フーリエ係数と複素フーリエ係数の関係は
この通りだが，複素フーリエ係数を求めるのに，
わざわざ実フーリエ係数を求める必要はない．

複素フーリエ係数

10

複素フーリエ係数 $$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

では，自力で導出してみましょう！

使うのは，次の2式と直交性．

複素フーリエ級数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

複素フーリエ係数の導出

11

指数関数系の直交性

12

指数関数系 $\{e^{inx} | n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ は
$-\pi \le x \le \pi$ 上の複素直交関数系をなす.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}(e^{inx})^* dx = \begin{cases} 2\pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}(e^{inx})^* dx &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx \\ &= \frac{1}{i(m-n)} \boxed{\left[e^{i(m-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi}} \\ &= 0 \quad (m \neq n) \end{aligned}$$

$$e^{iz\pi} = \cos z\pi + i \sin z\pi = (-1)^z$$

複素フーリエ係数の導出

13

複素フーリエ級数 $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} e^{-imx} dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = 2\pi c_m$$

複素フーリエ係数 $$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

複素フーリエ級数

14

周期 2π の周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

複素フーリエ係数 $$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

複素フーリエ級数の収束を実フーリエ級数の収束と一致させるため，和の上限と下限を一致させなければならない．

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

一般の周期関数のフーリエ級数展開

15

周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

複素フーリエ係数 $$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx$$

周期 2π から周期 $2L$ への変換 $x \to \dfrac{\pi x}{L}$

Outline

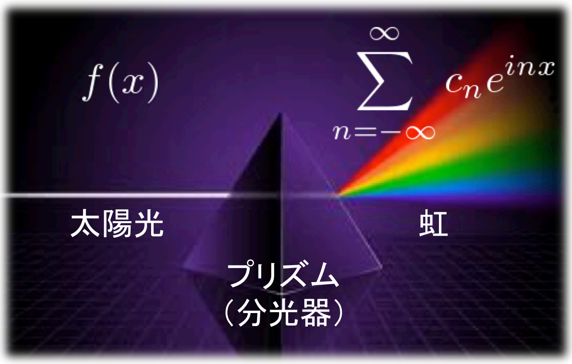
16

- 複素フーリエ級数展開
- スペクトル
- 複素フーリエ級数の微分積分
- 宿題

スペクトル

17

分解された光の分布がスペクトル c_n であり，
n 番目の光の強度は $|c_n|$ に比例する．



周波数（色）の異なる光は屈折率が異なるので分光器で分解される．

実関数の複素フーリエ係数

18

関数 $f(x)$ が実数のとき，c_{-n} は c_n の複素共役である．

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx$$

$$c_n^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)(e^{-inx})^* dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx$$

実関数の複素フーリエ係数は c_n だけ計算すればよい．

$c_n = a + ib$ とすると $c_{-n} = c_n^* = a - ib$

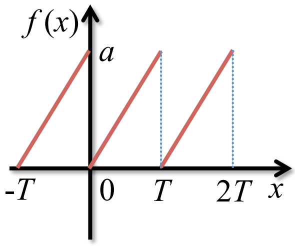
$$|c_n| = |c_{-n}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

鋸歯状波のスペクトル(1)

19

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{a}{2}$$

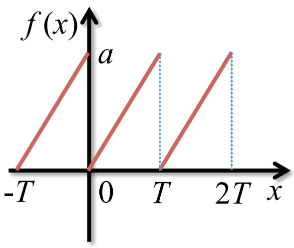
$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i2\pi nx/T}dx \\
&= \frac{a}{T^2}\int_0^T xe^{-i2\pi nx/T}dx \\
&= \frac{a}{T^2}\frac{T}{-i2\pi n}\left\{\left[xe^{-i2\pi nx/T}\right]_0^T - \int_0^T e^{-i2\pi nx/T}dx\right\} \\
&= \frac{ia}{2\pi nT}\left\{T\underbrace{e^{-i2\pi n}}_{=1} - \frac{T}{-i2\pi n}(\underbrace{e^{-i2\pi n}}_{=1} - 1)\right\} \\
&= \frac{ia}{2\pi n} \quad (n \neq 0)
\end{aligned}$$

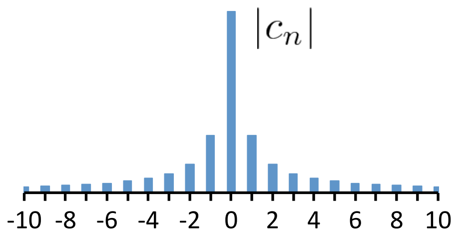


$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

鋸歯状波のスペクトル(2)

20





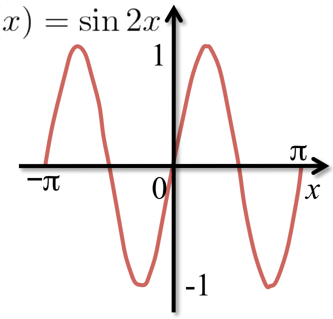
鋸歯状波は様々な
周波数成分から
構成されている.

$$|c_0| = \frac{a}{2}$$

$$|c_n| = \frac{a}{2\pi|n|} \quad (n \neq 0)$$

正弦波のスペクトル(1)

21

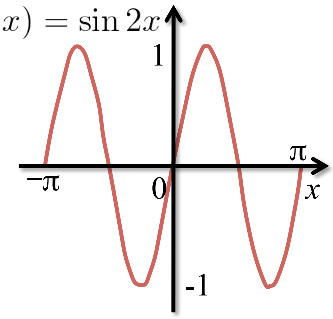


$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\, e^{-inx} dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x(\cos nx - i \sin nx) dx$$
$$= 0 \quad (n \neq \pm 2)$$

$\sin 2x$ 同士の積の積分は 0 にならない.

正弦波のスペクトル(2)

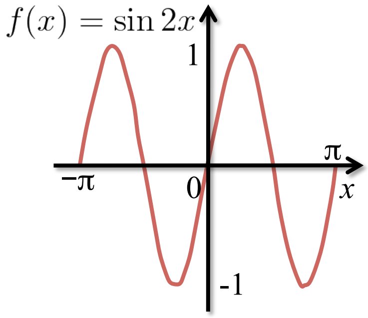
22

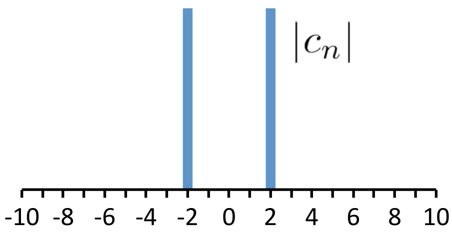


$$c_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\, e^{-i2x} dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} e^{-i2x} dx$$
$$= \frac{1}{i4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - e^{-i4x}\right) dx = \frac{-i}{4\pi}\left[x - \frac{e^{-i4x}}{-i4}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{i}{2}$$
$$c_{-2} = \frac{i}{2}$$

正弦波のスペクトル(3)

23





正弦波は単一の
周波数成分のみから
構成されている.

$$|c_n| = 0 \quad (n \neq \pm 2)$$

$$|c_2| = |c_{-2}| = \frac{1}{2}$$

Outline

24

- 複素フーリエ級数展開
- スペクトル
- 複素フーリエ級数の微分積分
- 宿題

複素フーリエ級数の微分

25

複素フーリエ級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

微分（項別微分可能な場合）

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{inc_n}_{c_n} e^{inx}$$

$$c_n(f') = inc_n(f)$$

複素フーリエ級数の微分は,
複素フーリエ係数に in を掛けるだけ！

複素フーリエ級数の積分

26

複素フーリエ級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

積分（項別積分可能な場合）

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = c_0 x + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{c_n(e^{inx}-1)}{in}$$

$$F(x) - c_0 x = \underbrace{-\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{c_n}{in}}_{c_0} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \underbrace{\frac{c_n}{in}}_{c_n} e^{inx}$$

複素フーリエ級数の不定積分は,
複素フーリエ係数を in で割るだけ！

導関数と不定積分の複素フーリエ級数

27

複素フーリエ級数 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{inc_n}_{c_n} e^{inx}$$

$$c_n(f') = inc_n(f)$$

導関数の複素フーリエ級数

in を掛けるだけ！

$$F(x) - c_0 x = \underbrace{-\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{c_n}{in}}_{c_0} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \underbrace{\frac{c_n}{in}}_{c_n} e^{inx}$$

$$c_0(F(x) - c_0(f)x) = -\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{c_n}{in}$$

$$c_n(F(x) - c_0(f)x) = \frac{c_n(f)}{in}$$

不定積分の複素フーリエ級数

in で割るだけ！

Outline

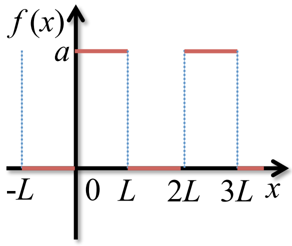
28

- 複素フーリエ級数展開
- スペクトル
- 複素フーリエ級数の微分積分
- 宿題

宿題

29

1. 右図の矩形波のスペクトルを求めよ．
（ c_n を計算して，$|c_n|$ のグラフを描く）



ヒント：以前の結果より

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < \pi) \\ 0 & (\pi \le x < 2\pi) \end{cases}$$

フーリエ級数展開

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & (n : \text{odd numbers}) \\ 0 & (n : \text{even numbers}) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin(2m-1)x$$

n が奇数のときだけ･･･