工業数学F2

#4 フーリエ級数を極める

京都大学　加納　学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻

Human Systems Lab., Dept. of Systems Science
Graduate School of Informatics, Kyoto University

2

復習1：複素フーリエ級数

周期 2π の周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

複素フーリエ係数 $$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

オイラーの公式

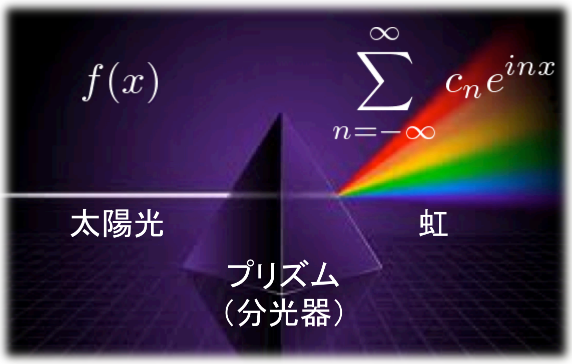
$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler）
（1707-1783 ）

復習2：スペクトル

3

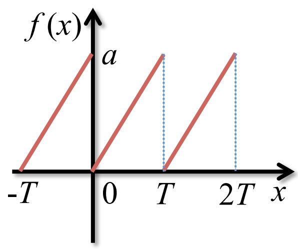
分解された光の分布がスペクトル c_n であり，
n 番目の光の強度は $|c_n|$ に比例する．

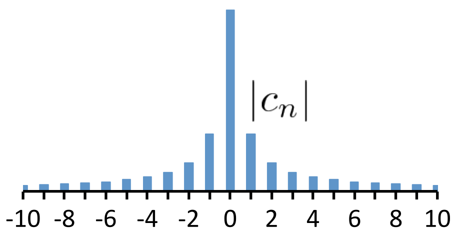


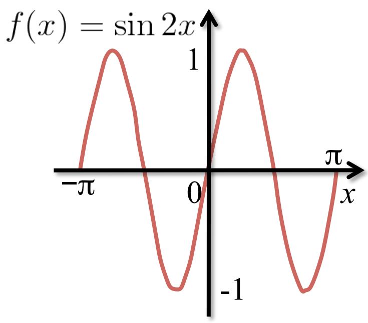
周波数（色）の異なる光は屈折率が異なるので分光器で分解される．

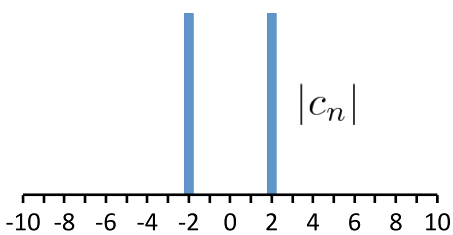
復習3：スペクトル

4









復習4：導関数と不定積分の複素フーリエ級数

5

複素フーリエ級数 $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

$$f'(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{inc_n}_{c_n} e^{inx}$$

$$c_n(f')=inc_n(f)$$

$$F(x)-c_0x=\underbrace{-\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\frac{c_n}{in}}_{c_0}+\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\underbrace{\frac{c_n}{in}}_{c_n}e^{inx}$$

$$c_0(F(x)-c_0(f)x)=-\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\frac{c_n}{in}$$

$$c_n(F(x)-c_0(f)x)=\frac{c_n(f)}{in}$$

導関数の複素フーリエ級数

in を掛けるだけ！

不定積分の複素フーリエ級数

in で割るだけ！

Outline

6

- 一様収束，項別積分，項別微分
- 導関数と不定積分のフーリエ級数展開
- フーリエ級数の各点収束
- ギブス現象
- 最良近似問題，パーセバルの等式
- 宿題

フーリエ級数の微分

7

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

微分

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{-na_n}_{b_n} \sin nx + \underbrace{nb_n}_{a_n} \cos nx)$$

フーリエ級数の微分は，
フーリエ係数に n または $-n$ を掛けるだけ！

何が問題なのか？

8

無限級数の項別微分可能性

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} g_n(x)$$

この等式は成り立つのか？

微分と極限を交換できるか？

この等式は成り立つ！

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{N} g_n(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{d}{dx} g_n(x)$$

項別微分ができない例

9

$$f(x) = x \quad (0 \le x \le \pi)$$

フーリエ正弦級数展開

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$

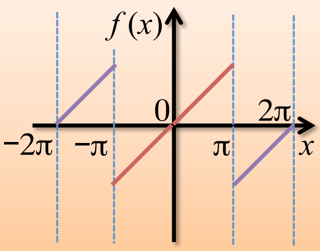
両辺を微分

$$1 = 2(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots)$$

右辺は収束しない．
（例えば $x = 0$ とする）

フーリエ正弦級数展開

$f(-x) = -f(x)$ で奇関数に拡張
$f(x+2\pi) = f(x)$ で周期関数に拡張



一様収束

10

任意の正数 ε に対して，x に無関係な数 M を

$$N > M \quad \Rightarrow \quad \left| g(x) - \sum_{n=1}^{N} g_n(x) \right| < \epsilon$$

が成り立つように取ることができるとき，

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ は関数 $g(x)$ に一様収束するという．

$$\lim_{N\to\infty} \sup \left| g(x) - \sum_{n=1}^{N} g_n(x) \right| = 0$$

収束と一様収束

11

$$\sum_{n=1}^{N} g_n(x) = \sum_{n=1}^{N} x^{n-1}(1-x) = 1 - x^N$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} g_n(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

閉区間 $0 \le x \le 1$ で収束する.

$$\left| g(x) - \sum_{n=1}^{N} g_n(x) \right| = \left|1 - (1 - x^N)\right| < \epsilon \qquad N > \frac{\log \epsilon}{\log x} = M$$

x が 1 に近づくと, M は限りなく大きくなる. すなわち, x に関係して M を大きく取らなければならないので, 一様収束しない.

項別積分可能性

12

連続関数級数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ が一様収束するならば,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)dx$$

が成り立つ. すなわち, 項別積分可能である.

項別積分可能性の証明

13

任意の正数 ε に対して，$N > M$ ならば

$$\left| \int_a^b \sum_{n=1}^{N} g_n(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| = \left| \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{N} g_n(x) - g(x) \right) dx \right|$$

$$\leq \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} g_n(x) - g(x) \right| dx \leq \int_a^b \epsilon dx = \epsilon(b-a)$$

一様収束するから

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{N} g_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} g_n(x)dx$$

積分の後で極限　　　極限の後で積分

項別微分可能性

14

連続関数級数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ が収束し，かつ

導関数からなる連続関数級数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x)$ が一様収束するならば，

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} g_n(x)$$

が成り立つ．すなわち，項別微分可能である．

項別微分可能性の証明

15

一様収束するから項別積分可能

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x g_n'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(g_n(x) - g_n(a))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a)$$

微分

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} g_n(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

微分の後で極限　極限の後で微分

Outline

16

- 一様収束，項別積分，項別微分
- 導関数と不定積分のフーリエ級数展開
- フーリエ級数の各点収束
- ギブス現象
- 最良近似問題，パーセバルの等式
- 宿題

導関数のフーリエ係数

17

$$a_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) n \sin nx dx$$
$$= nb_n(f)$$

$b_n(f') =$ では，自力で求めてみましょう！

$$= -na_n(f)$$

導関数のフーリエ係数は，元の関数の
フーリエ係数に n または $-n$ を掛けるだけ！

フーリエ級数の微分

18

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

微分 （項別微分可能な場合）

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{-na_n}_{b_n} \sin nx + \underbrace{nb_n}_{a_n} \cos nx)$$

フーリエ級数の微分は，
フーリエ係数に n または $-n$ を掛けるだけ！

フーリエ級数の積分

19

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

積分 （項別積分可能な場合）

$$F(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}(\cos nx - 1)\right\}$$

$$F(x) - \frac{a_0 x}{2} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}}_{a_0/2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{a_n}{n}}_{b_n}\sin nx - \underbrace{\frac{b_n}{n}}_{a_n}\cos nx\right)$$

フーリエ級数の積分は，
フーリエ係数を n または $-n$ で割るだけ！

導関数と不定積分のフーリエ級数

20

フーリエ級数 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{-na_n}_{b_n}\sin nx + \underbrace{nb_n}_{a_n}\cos nx)$$

$$a_n(f') = nb_n(f)\ ,\ b_n(f') = -na_n(f)$$

導関数のフーリエ級数 n, $-n$ を掛けるだけ！

$$F(x) - \frac{a_0 x}{2} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}}_{a_0/2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{a_n}{n}}_{b_n}\sin nx - \underbrace{\frac{b_n}{n}}_{a_n}\cos nx\right)$$

$$a_0(G) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(f)}{n}\ ,\ a_n(G) = -\frac{b_n(f)}{n}\ ,\ b_n(G) = \frac{a_n(f)}{n}$$

不定積分のフーリエ級数 n, $-n$ で割るだけ！

Outline

21

- 一様収束，項別積分，項別微分
- 導関数と不定積分のフーリエ級数展開
- フーリエ級数の各点収束
- ギブス現象
- 最良近似問題，パーセバルの等式
- 宿題

フーリエ級数の各点収束

22

各点収束の問題

関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開は各点 x で $f(x)$ に収束するか？

ディリクレ（Dirichlet）
（1805-1859）

関数 $f(x)$ がディリクレ条件を満たすとき，すなわち，区分的に滑らかな周期関数であるとき，フーリエ級数展開はすべての点で収束する．ただし，関数 $f(x)$ が不連続な点では次の値に収束する．

$$\frac{\lim_{\epsilon \to 0} f(x+\epsilon) + \lim_{\epsilon \to 0} f(x-\epsilon)}{2}$$

区分的に連続／滑らか

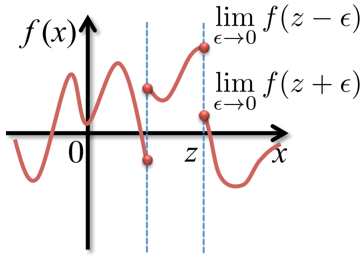
23

- 区分的に連続
  関数 $f(x)$ が有限個の点を除いて連続で，不連続点において，次の極限値の両者が存在し，有限な値を取ること．

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(z+\epsilon) \quad , \quad \lim_{\epsilon\to 0} f(z-\epsilon) \quad (\epsilon > 0)$$

このような不連続点を第１種の不連続点という．

- 区分的に滑らか
  区分的に連続な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が区分的に連続であること．



Outline

24

- 一様収束，項別積分，項別微分
- 導関数と不定積分のフーリエ級数展開
- フーリエ級数の各点収束
- ギブス現象
- 最良近似問題，パーセバルの等式
- 宿題

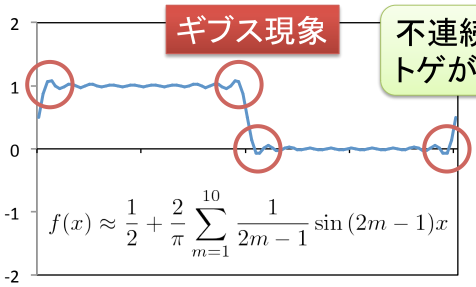
ギブス現象

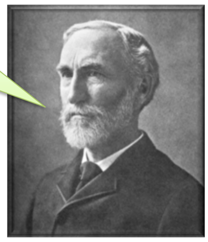
25

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < \pi) \\ 0 & (\pi \le x < 2\pi) \end{cases}$$

フーリエ級数展開

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin(2m-1)x$$





ギブズ（Gibbs）
（1839-1903）

不連続関数を連続関数で近似するのは難しい.

ギブス現象

26

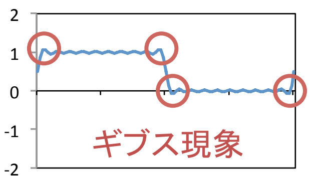
- ギブス現象
  - 不連続点を持つ関数の級数展開において必ず現れる.
  - 区分的に連続な関数 $f(x)$ の第 n 項までのフーリエ級数の部分和 $S_n(x)$ は，n を大きくしていくと一様に次の関数 $f^*(x)$ に近づいていく.

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{（連続点）} \\ \text{line between } f(x-0)-cd \ \& \ f(x+0)+cd & \text{（不連続点）} \end{cases}$$

$$c = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{0.281141}{\pi} \approx 0.089490$$

$$d = f(x+0) - f(x-0)$$

  - 不連続点があると，部分和 $S_n(x)$ は関数 $f(x)$ に一様収束しない.

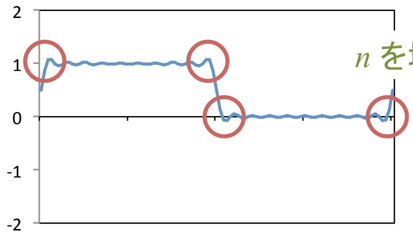


ギブス現象

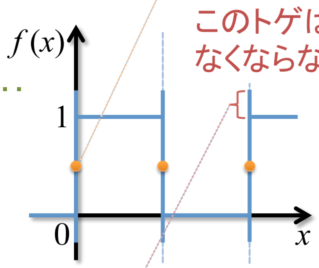
27

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < \pi) \\ 0 & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases}$$

$$\frac{\lim_{\epsilon \to 0} f(x+\epsilon) + \lim_{\epsilon \to 0} f(x-\epsilon)}{2}$$



n を増やすと･･･



このトゲは
なくならない.

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{10} \frac{1}{2m-1} \sin(2m-1)x$$

$$c = -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0.089490$$

$$d = f(x+0) - f(x-0) = 1$$

Outline

28

- 一様収束，項別積分，項別微分
- 導関数と不定積分のフーリエ級数展開
- フーリエ級数の各点収束
- ギブス現象
- 最良近似問題，パーセバルの等式
- 宿題

最良近似問題

29

最良近似問題

周期 2π の周期関数 $f(x)$ を
三角多項式 $T_N(x)$ で最も良く近似せよ！

$$T_N(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

平均二乗誤差 E を最小化する係数 c_n, d_n を求めよ！

$$\min_{c_n, d_n} E = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 dx$$

評価関数の変形(1)

30

$$T_N(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_N(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_N^2(x)dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\pi\left\{\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(c_n a_n + d_n b_n)\right\} \\
&\quad + \pi\left\{\frac{c_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(c_n^2 + d_n^2)\right\}
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

評価関数の変形(2)

31

係数 c_n, d_n に依存しない

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

$$+\pi \left[\frac{(a_0 - c_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \{(a_n - c_n)^2 + (b_n - d_n)^2\} \right]$$

$$\min_{c_n, d_n} \frac{(a_0 - c_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \{(a_n - c_n)^2 + (b_n - d_n)^2\}$$

$$c_n = a_n \quad , \quad d_n = b_n$$

フーリエ係数の最終性

32

最良近似問題の解（平均二乗誤差を最小化する係数 c_n, d_n）は，関数 $f(x)$ のフーリエ係数である.

フーリエ係数の最終性

フーリエ係数は N に関係なく決まるので，もっと N を大きくした三角多項式で $f(x)$ を最良近似するときにも，既に求めた係数を再計算する必要がない.

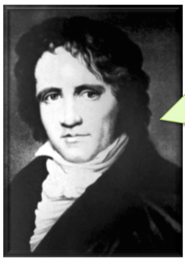
$$T_N(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

ベッセルの不等式

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$
$$+\pi \left[\frac{(a_0 - c_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \{(a_n - c_n)^2 + (b_n - d_n)^2\} \right]$$
$$\geq 0 \qquad\qquad = 0$$

ベッセルの不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$



ベッセル（Bessel）
（1784-1846）

パーシバルの等式

ベッセルの不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

関数 $f(x)$ が（区分的に）滑らかならば，
$N \to \infty$ で等号が成り立つ．

パーシバルの等式

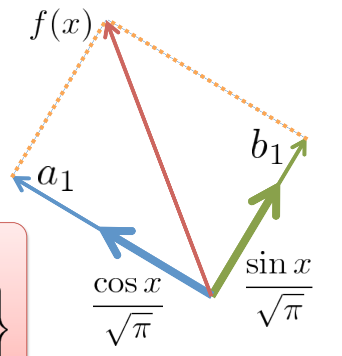
$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

パーシバルの等式のイメージ

35

$$f(x) = a_1 \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + b_1 \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = a_1^2 + b_1^2$$



三角関数系を直交基底とする「三平方の定理」

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 mx dx = \pi$$

パーシバルの等式の導出

36

パーシバルの等式 $$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

では，自力で導出してみましょう！

関数 $f(x)$ は滑らかな周期 2π の周期関数とする．
このとき，フーリエ級数展開は $f(x)$ に一様収束する．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

バーシバルの等式の導出

37

平均収束

38

区分的に滑らかな周期 2π の周期関数 $f(x)$ の
フーリエ級数展開の部分和

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と関数 $f(x)$ の平均二乗誤差 E が $N \to \infty$ で 0 に近づくとき,
フーリエ級数は関数 $f(x)$ に平均収束するという.

$$\lim_{N\to\infty} E = \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))^2 dx = 0$$

平均収束（limit in the mean）　$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} S_N(x) = f(x)$

Outline

39

- 一様収束，項別積分，項別微分
- 導関数と不定積分のフーリエ級数展開
- フーリエ級数の各点収束
- ギブス現象
- 最良近似問題，パーセバルの等式
- 宿題

宿題

40