工業数学F2
#5 フーリエ変換を操る

京都大学　加納　学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻
Human Systems Lab., Dept. of Systems Science
Graduate School of Informatics, Kyoto University

復習1：複素フーリエ級数

2

周期 2π の周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

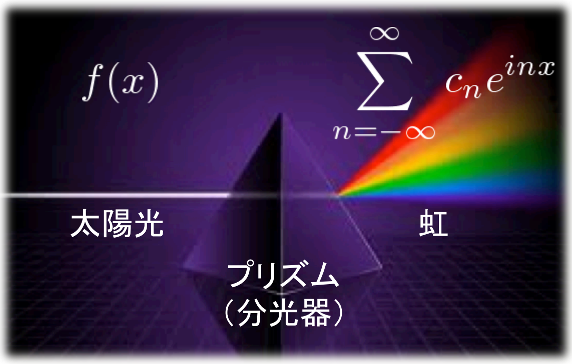
複素フーリエ係数　$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

オイラーの公式
$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler）
（1707-1783 ）

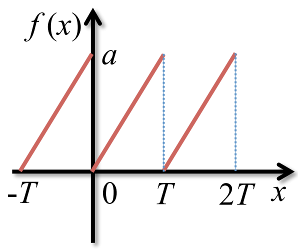
復習2：スペクトル

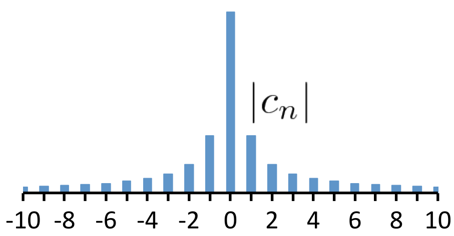
分解された光の分布がスペクトル c_n であり，
n 番目の光の強度は $|c_n|$ に比例する．

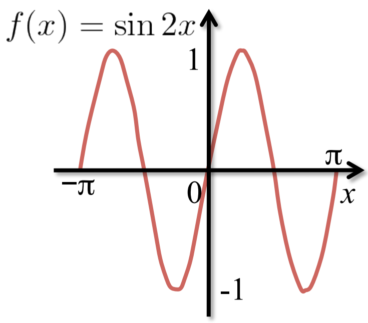


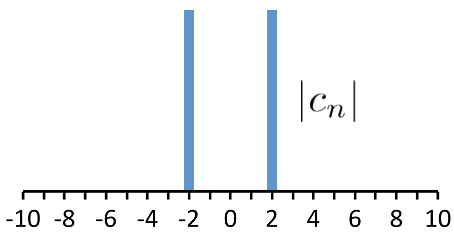
周波数（色）の異なる光は屈折率が異なるので分光器で分解される．

復習3：スペクトル









Outline

5

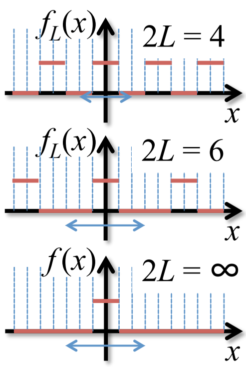
- フーリエ積分とフーリエ変換
- 連続スペクトルと離散スペクトル
- フーリエ余弦変換とフーリエ正弦変換
- フーリエ変換の性質
- 宿題

矩形波

6

周期 $2L$ の周期関数

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & (-L < x < -1) \\ 1 & (-1 < x < 1) \\ 0 & (1 < x < L) \end{cases}$$



周期 $2L \to \infty$ の極限

非周期関数

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & (-1 < x < 1) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

フーリエ積分

7

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(y) e^{-in\pi y/L} dy \right\} e^{in\pi x/L}$$

$$\omega_n = n\pi/L$$

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \pi/L$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(y) e^{-i\omega_n y} dy \right\} e^{i\omega_n x} \Delta\omega$$

フーリエ積分

8

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(y) e^{-i\omega_n y} dy \right\} e^{i\omega_n x} \Delta\omega$$

リーマン積分の定義

$$\lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)\Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$$

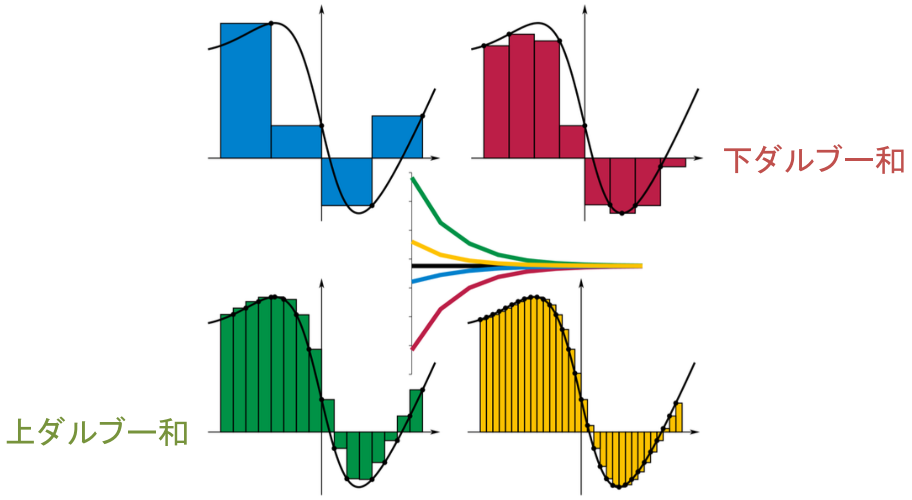
関数 $f(x)$ が絶対可積分（絶対値の積分が有限）であれば

（複素）フーリエ積分

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)} dy d\omega$$

リーマン積分

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)\Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$$



フーリエ変換

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}dyd\omega$$

フーリエ変換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dy$

フーリエ逆変換 $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega) \qquad \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(x)$$

フーリエ変換

11

あるいは，以下のように書いてもよい．

フーリエ変換 $F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dy$

フーリエ逆変換 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$

フーリエ変換が存在する十分条件
1）関数 $f(x)$ が区分的に連続
2）関数 $f(x)$ が絶対可積分

フーリエ変換の例(1)

12

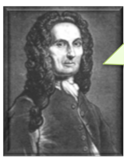
$$f(x)=\lim_{L\to\infty} f_L(x)=\begin{cases}1 & (-1<x<1)\\ 0 & (\text{else})\end{cases}$$

フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{-i\omega}\left[e^{-i\omega x}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{\omega}\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega}-e^{-i\omega}\right)$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin\omega$$



ド・モアブルの公式

$$\sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

フーリエ変換の例(2)

13

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (a > 0) \quad (x > 0) \\ 0 & \quad\quad\quad\quad (else) \end{cases}$$

↓ フーリエ変換

では，自力で導出してみましょう！

Outline

14

- フーリエ積分とフーリエ変換
- 連続スペクトルと離散スペクトル
- フーリエ余弦変換とフーリエ正弦変換
- フーリエ変換の性質
- 宿題

スペクトル

15

周期 2π の周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数展開

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\omega_n x}dx \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$$

離散スペクトル

$$\omega_n = n\pi/L$$

非周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ積分

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dy \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

連続スペクトル

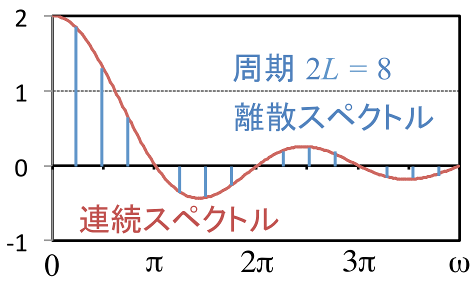
スペクトルの例

16

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & (-1 < x < 1) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

フーリエ変換　フーリエ級数展開

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\omega$$



$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\omega_n x}dx \\
&= \frac{1}{2L}\left[\frac{1}{-i\omega_n}e^{-i\omega_n x}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{L\omega_n}\frac{e^{i\omega_n} - e^{-i\omega_n}}{2i} \\
&= \frac{1}{L\omega_n}\sin\omega_n
\end{aligned}$$

Outline

17

- フーリエ積分とフーリエ変換
- 連続スペクトルと離散スペクトル
- フーリエ余弦変換とフーリエ正弦変換
- フーリエ変換の性質
- 宿題

実数型のフーリエ積分

18

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}dyd\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}dyd\omega \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}dyd\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{e^{i\omega(x-y)}+e^{-i\omega(x-y)}}{2}dyd\omega
\end{aligned}
$$

実数型のフーリエ積分

19

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(y)\frac{e^{i\omega(x-y)} + e^{-i\omega(x-y)}}{2} dyd\omega$$

ド・モアブルの公式

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos\omega(x-y)dyd\omega$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$$

フーリエ積分

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\}d\omega$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos\omega y dy \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(y)\sin\omega y dy$$

フーリエ余弦変換

20

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\}d\omega$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos\omega y dy \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(y)\sin\omega y dy$$

関数 $f(x)$ が偶関数ならば

フーリエ余弦積分

フーリエ余弦逆変換 $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega x d\omega$

フーリエ余弦変換 $F_c(\omega) = \int_0^\infty f(y)\cos\omega y dy$

フーリエ正弦変換

21

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\}d\omega$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos\omega y dy \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(y)\sin\omega y dy$$

関数 $f(x)$ が奇関数ならば

フーリエ正弦積分

フーリエ正弦逆変換 $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty F_s(\omega)\sin\omega x d\omega$

フーリエ正弦変換 $F_s(\omega) = \displaystyle\int_0^\infty f(y)\sin\omega y dy$

フーリエ余弦変換の例

22

$$f(x) = e^{-ax} \quad (a > 0, x \geq 0)$$

フーリエ余弦変換

$$\begin{aligned}
F_c(\omega) &= \int_0^\infty f(y)\cos\omega y dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-ax}(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x})dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-a+i\omega}e^{-ax+i\omega x} + \frac{1}{-a-i\omega}e^{-ax-i\omega x}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}\right\} \\
&= \frac{a}{a^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

23

フーリエ正弦変換の例

$$f(x) = e^{-ax} \quad (a > 0, x \geq 0)$$

↓ フーリエ正弦変換

では，自力で導出してみましょう！

24

Outline

- フーリエ積分とフーリエ変換
- 連続スペクトルと離散スペクトル
- フーリエ余弦変換とフーリエ正弦変換
- フーリエ変換の性質
- 宿題

フーリエ変換の性質

25

- 線形性　$\mathcal{F}[af(x)+bg(x)] = aF(\omega)+bG(\omega)$
- 周波数シフト　$\mathcal{F}[f(x)e^{i\omega_0 x}] = F(\omega-\omega_0)$
- 導関数　$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega F(\omega)$

では，自力で証明してみましょう！

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

線形性

26

簡単な関数のフーリエ変換が既知であれば，
それらの線形結合で表される関数のフーリエ
変換は簡単に求められる.

周波数シフト

27

ラジオのAM放送への応用

振幅変調（Amplitude Modulation: AM）

28

音声信号

$$f(t)$$

$$F(\omega)$$

↓ 変調

振幅変調信号（電気信号）

$$g(t) = f(t)\cos\omega_c t = \frac{1}{2}f(t)(e^{i\omega_c t} + e^{-i\omega_c t})$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2}\{F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)\}$$

↓ 復調（検波）

復元信号

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= g(t)\cos\omega_c t = f(t)\cos^2\omega_c t \\ &= \frac{1}{2}f(t)(1 + \cos 2\omega_c t)\end{aligned}$$

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega) + \frac{1}{4}\{F(\omega - 2\omega_c) + F(\omega + 2\omega_c)\}$$

導関数

29

関数 $f(x)$ の導関数のフーリエ変換は，
関数 $f(x)$ のフーリエ変換に $i\omega$ を掛ける
だけで求められる．

Outline

30

- フーリエ積分とフーリエ変換
- 連続スペクトルと離散スペクトル
- フーリエ余弦変換とフーリエ正弦変換
- フーリエ変換の性質
- 宿題

宿題

31

1. 次の関数のフーリエ変換を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-ax} \quad (a > 0) & (x > 0) \\ 0 & (else) \end{cases}$$

2. 次の積分方程式を関数 $f(x)$ について解け.

$$\int_0^\infty f(x) \sin ax dx = \begin{cases} 1 & (0 \leq a < 1) \\ 0 & (1 < a) \end{cases}$$