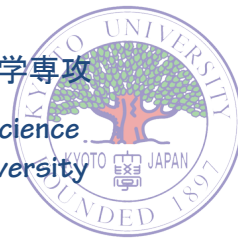


工業数学F2

#6 線形システムを解析する

京都大学 加納 学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻
Human Systems Lab., Dept. of Systems Science
Graduate School of Informatics, Kyoto University



復習1:フーリエ変換

2

非周期関数 $f(x)$ のフーリエ変換

フーリエ変換
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy$$

フーリエ逆変換
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$



フーリエ変換が存在する十分条件

- 1) 関数 $f(x)$ が区分的に連続
- 2) 関数 $f(x)$ が絶対可積分

復習2: スペクトル

3

フーリエ級数展開

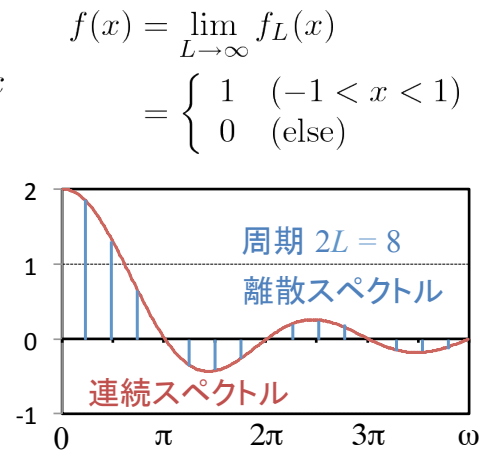
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\omega_n x} dx$$

離散スペクトル

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy$$

連続スペクトル



復習3: フーリエ変換の性質

4

- 線形性 $\mathcal{F}[af(x) + bg(x)] = aF(\omega) + bG(\omega)$
- 周波数シフト $\mathcal{F}[f(x)e^{i\omega_0 x}] = F(\omega - \omega_0)$
- 導関数 $\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega F(\omega)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

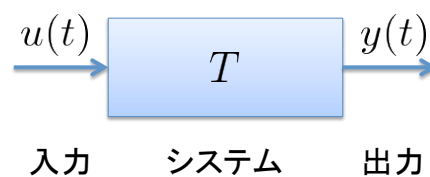
Outline

5

- 線形システム
- インパルス応答と伝達関数
- 宿題

線形システム

6



$$y(t) = T[u(t)]$$

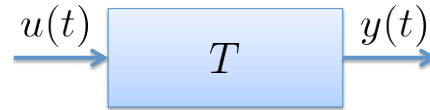
次の2つの性質を満たすシステムを線形システムという.

$$T[au(t)] = aT[u(t)]$$

$$T[u_1(t) + u_2(t)] = T[u_1(t)] + T[u_2(t)]$$

線形システムの出力

7



$$y(t) = T[u(t)]$$

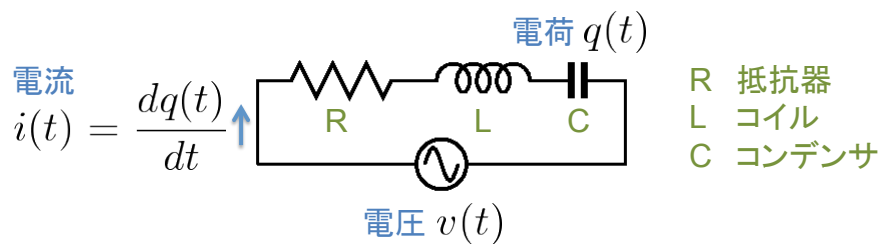
入力が周期関数であれば

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{in\omega t} \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n T[e^{in\omega t}]$$

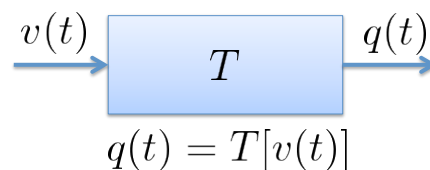
システムの応答 $T[e^{in\omega t}]$ が既知であれば、
一般の周期入力に対する応答がわかる。

線形システムの例:RLC回路

8



回路方程式
$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = v(t)$$



$$q(t) = T[v(t)]$$

線形システムの例:RLC回路

9

角周波数 ω (周期 $2\pi/\omega$) の周期入力 $v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{in\omega t}$

$$L \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + R \frac{dq_n(t)}{dt} + \frac{1}{C} q_n(t) = V_n e^{in\omega t}$$



重ね合わせの原理

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n T[e^{in\omega t}]$$

線形性より, こうなる

線形システムの例:RLC回路

10

$$L \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + R \frac{dq_n(t)}{dt} + \frac{1}{C} q_n(t) = V_n e^{in\omega t}$$

$q_n(t) = Q_n e^{in\omega t}$  微分方程式が代数方程式になる

$$\left(-n^2 \omega^2 + in\omega R + \frac{1}{C} \right) Q_n = V_n$$



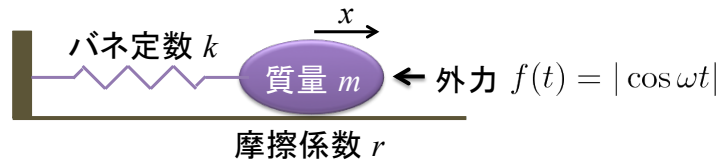
重ね合わせの原理で解が求まる

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{CV_n e^{in\omega t}}{1 - n^2 \omega^2 CL + in\omega CR}$$

$V_n T[e^{in\omega t}]$

演習

11



$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + r \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = |\cos \omega t|$$

定常出力 $x(t)$ を求めよ.

1. 外力 $f(t)$ のフーリエ級数展開を求める.
2. 重ね合わせの原理を用いて解を求める.

演習

12

周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx$$

$f(t) = |\cos \omega t|$ の周期は π/ω なので

$$|\cos \omega t| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2in\omega t}$$

演習

13

演習

14

演習

15

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + r \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = |\cos \omega t|$$

$$|\cos \omega t| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} e^{2in\omega t}$$

演習

16



重ね合わせの原理で解が求まる

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{2in\omega t}}{(4n^2 - 1)(-4n^2\omega^2 m + 2in\omega r + k)}$$

Outline

17

- 線形システム
- インパルス応答と伝達関数
- 宿題

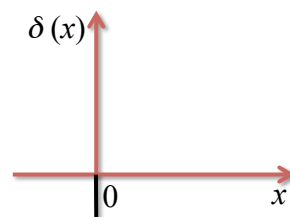
ディラックのデルタ関数

18

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

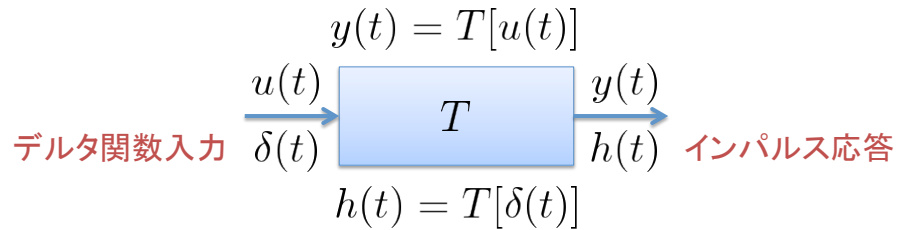


インパルス関数とも呼ぶ

ポール・ディラック (Paul A. M. Dirac)
(1902-1984)

インパルス応答

19



$$\begin{aligned}
 y(t) &= T[u(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(s)\delta(t-s)ds\right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} u(s)T[\delta(t-s)]ds = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)h(t-s)ds
 \end{aligned}$$

インパルス応答が既知であれば、
任意の入力に対する応答は合成積として求まる。

合成積

20

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の合成積

$$\begin{aligned}
 f * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(r)f(t-r)dr = g * f(t)
 \end{aligned}$$

$$y(t) = T[u(t)] = u * h(t) = h * u(t)$$

合成積のフーリエ変換

21

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f * g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds \right\} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)e^{-i\omega(t-s)} dt \right\} f(s)e^{-i\omega s} ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s} ds \int_{-\infty}^{\infty} g(r)e^{-i\omega r} dr \\
 &= \mathcal{F}[f(t)]\mathcal{F}[g(t)]
 \end{aligned}$$

合成積のフーリエ変換はフーリエ変換の積

伝達関数

22

$$u(t) = e^{i\omega t} \xrightarrow{\quad} \boxed{T} \xrightarrow{\quad} y(t) = H(i\omega)e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{i\omega(t-s)} ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-i\omega s} ds e^{i\omega t} \\
 &= \mathcal{F}[h]e^{i\omega t} = H(i\omega)e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

伝達関数＝インパルス応答のフーリエ変換

入力 $e^{i\omega t}$ が何倍となって出力に現れるかを示す

低域通過フィルタ

23

理想低域通過フィルタ

$$H(i\omega) = \begin{cases} Ae^{-i\tau\omega} & (|\omega| \leq \omega_f, \tau : \text{constant}) \\ 0 & (|\omega| > \omega_f) \end{cases}$$

インパルス応答

遮断周波数

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(i\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_f}^{\omega_f} Ae^{i\omega(t-\tau)} d\omega \\ &= \frac{A(e^{i\omega_f(t-\tau)} - e^{-i\omega_f(t-\tau)})}{2\pi i(t-\tau)} = \frac{A \sin \omega_f(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} \end{aligned}$$

帯域通過フィルタ

24

理想帯域通過フィルタ

$$H(i\omega) = \begin{cases} 0 & (|\omega| < \omega_a) \\ Ae^{-i\tau\omega} & (\omega_a \leq |\omega| \leq \omega_b) \\ 0 & (\omega_b < |\omega|) \end{cases}$$

インパルス応答を求めてみましょう！

Outline

25

- 線形システム
- インパルス応答と伝達関数
- 宿題

宿題

26

1. 次の線形システムの定常出力を求めよ.

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + r \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = |\cos \omega t|$$

2. 次の伝達関数のインパルス応答を求めよ.

$$H(i\omega) = \begin{cases} 0 & (|\omega| < \omega_a) \\ Ae^{-i\tau\omega} & (\omega_a \leq |\omega| \leq \omega_b) \\ 0 & (\omega_b < |\omega|) \end{cases}$$

本日の演習そのまま

