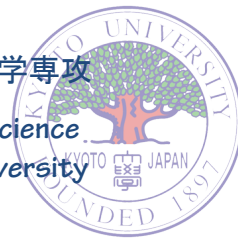


工業数学F2

#7 自己・相互相関関数を使う

京都大学 加納 学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻
Human Systems Lab., Dept. of Systems Science
Graduate School of Informatics, Kyoto University



復習1:フーリエ変換

2

非周期関数 $f(x)$ のフーリエ変換

フーリエ変換
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy$$

フーリエ逆変換
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

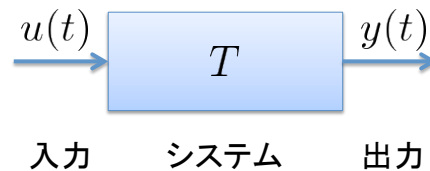


フーリエ変換が存在する十分条件

- 1) 関数 $f(x)$ が区分的に連続
- 2) 関数 $f(x)$ が絶対可積分

復習2: 線形システム

3



$$y(t) = T[u(t)]$$

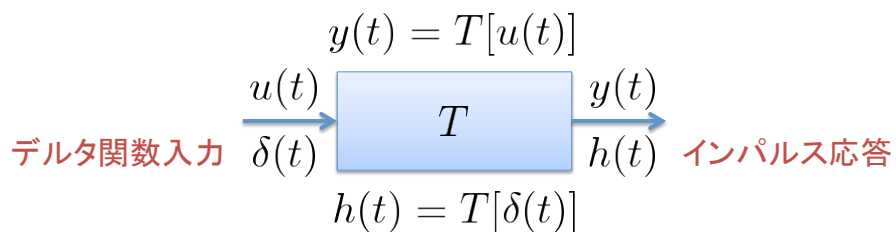
次の2つの性質を満たすシステムを線形システムという.

$$T[au(t)] = aT[u(t)]$$

$$T[u_1(t) + u_2(t)] = T[u_1(t)] + T[u_2(t)]$$

復習3: インパルス応答

4



$$\begin{aligned} y(t) &= T[u(t)] = T \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(s) \delta(t-s) ds \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(s) T[\delta(t-s)] ds = \int_{-\infty}^{\infty} u(s) h(t-s) ds \end{aligned}$$

インパルス応答が既知であれば,
任意の入力に対する応答は合成積として求まる.

復習4: 伝達関数

5

$$u(t) = e^{i\omega t} \quad \xrightarrow{\quad T \quad} \quad y(t) = H(i\omega)e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{i\omega(t-s)}ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-i\omega s}dse^{i\omega t} \\ &= \mathcal{F}[h]e^{i\omega t} = H(i\omega)e^{i\omega t} \end{aligned}$$

伝達関数＝インパルス応答のフーリエ変換

入力 $e^{i\omega t}$ が何倍となって出力に現れるかを示す

Outline

6

- パーシバルの等式
- ウィーナー・ヒンチンの定理
- 相互相関関数とインパルス応答
- 宿題

パーシバルの等式

7

パーシバルの等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

三角関数系を直交基底とする「三平方の定理」



フーリエ変換に拡張すると、どうなるか？

パーシバルの等式の導出

8

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{i\omega t} dt \right\} d\omega \end{aligned}$$

フーリエ逆変換 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

パーシバルの等式の導出

9

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{i\omega t} dt \right\} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

フーリエ変換
の複素共役

$$\begin{aligned}
 F^*(\omega) &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right\}^* \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{i\omega t} dt
 \end{aligned}$$

パーシバルの等式

10

パーシバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

時間領域での
エネルギー

周波数領域での
エネルギー

パワースペクトル(エネルギースペクトル)

$$E(\omega) = |F(\omega)|^2 = F(\omega) F^*(\omega)$$

Outline

11

- パーシバルの等式
- ウィーナー・ヒンチンの定理
- 相互相関関数とインパルス応答
- 宿題

ウィーナー・ヒンチンの定理

12

パワースペクトル $E(\omega) = |F(\omega)|^2 = F(\omega)F^*(\omega)$

自己相関関数 $R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt$

ウィーナー・ヒンチンの定理

$$E(\omega) = \mathcal{F}[R_{ff}(\tau)]$$
$$R_{ff}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[E(\omega)]$$

相互相関関数

13

相互相関関数 $R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)dt$

関数 $f(t)$ と関数 $g(t)$ がどの程度似ているかを表す,
時間シフト τ の関数

$f(t) = g(t)$ の場合の相互相関関数が自己相関関数

ウィーナー・ヒンチンの定理の導出

14

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[R_{ff}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t - \tau)dt \right\} e^{-i\omega\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \right\} dt\end{aligned}$$

フーリエ変換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

自己相関関数 $R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t - \tau)dt$

ウィーナー・ヒンチンの定理の導出

15

$$s = t - \tau$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega(t-s)} ds \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i(-\omega)s} ds \\ &= F(\omega) F(-\omega) \\ &= |F(\omega)|^2 \end{aligned}$$

最後の等式は成り立つのか？

パワースペクトル $E(\omega) = |F(\omega)|^2 = F(\omega) F^*(\omega)$

補助

16

$$f(t) \text{ が実関数} \Leftrightarrow F(-\omega) = F^*(\omega)$$

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler)
(1707-1783)



補助(証明の前半)

17

$f(t)$ が実関数ならば...

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{ \cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t) \} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}[F(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$\operatorname{Im}[F(\omega)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

補助(証明の前半)

18

$f(t)$ が実関数ならば...

$$\operatorname{Re}[F(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$\operatorname{Im}[F(\omega)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$



$$\begin{aligned} F(-\omega) &= \operatorname{Re}[F(-\omega)] + i \operatorname{Im}[F(-\omega)] \\ &= \operatorname{Re}[F(\omega)] - i \operatorname{Im}[F(\omega)] \\ &= F^*(\omega) \end{aligned}$$

補助(証明の後半)

19

$F(-\omega) = F^*(\omega)$ ならば...

$$F(\omega) = F_r(\omega) + iF_i(\omega)$$

$$f(t) = f_r(t) + if_i(t)$$

$$F(-\omega) = F_r(-\omega) + iF_i(-\omega)$$

$$F^*(\omega) = F_r(\omega) - iF_i(\omega)$$



$$F_r(-\omega) = F_r(\omega) \quad \text{偶関数}$$

$$F_i(-\omega) = -F_i(\omega) \quad \text{奇関数}$$

補助(証明の後半)

20

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F_r(\omega) + iF_i(\omega)) (\cos \omega t + i \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F_r(\omega) \cos \omega t - F_i(\omega) \sin \omega t) d\omega \\ &\quad + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F_r(\omega) \sin \omega t + F_i(\omega) \cos \omega t) d\omega \end{aligned}$$



$$F_r(-\omega) = F_r(\omega) \quad \text{偶関数}$$

$$F_i(-\omega) = -F_i(\omega) \quad \text{奇関数}$$

$$f_i(t) = 0$$

$f(t)$ は実関数

ここまでを整理すると

21

$$f(t) \text{ が実関数} \Leftrightarrow F(-\omega) = F^*(\omega)$$

ウィーナー・ヒンチンの定理

$$E(\omega) = \mathcal{F}[R_{ff}(\tau)]$$

$$R_{ff}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[E(\omega)]$$

パワースペクトル $E(\omega) = |F(\omega)|^2 = F(\omega)F^*(\omega)$

自己相関関数 $R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt$

まとめ

22

時間領域

$$f(t)$$

自己相関関数

$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

ウィーナー・ヒンチンの定理

$$E(\omega) = \mathcal{F}[R_{ff}(\tau)]$$

$$R_{ff}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[E(\omega)]$$

$$F(\omega)$$

パワースペクトル

$$E(\omega) = |F(\omega)|^2$$

周波数領域

パーシバルの等式 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

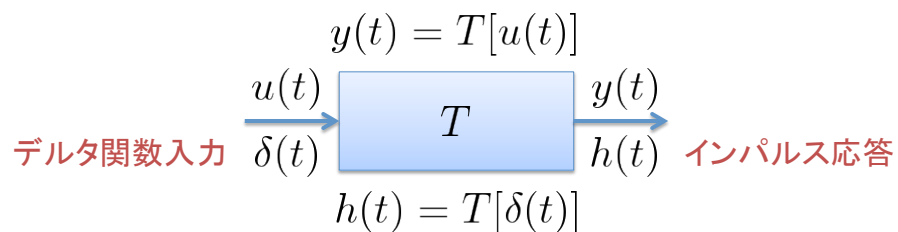
Outline

23

- パーシバルの等式
- ウィーナー・ヒンチンの定理
- 相互相関関数とインパルス応答
- 宿題

相互相関関数とインパルス応答

24



$R_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$ のとき

相互相関関数 $R_{yu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)u(t - \tau)dt$

はインパルス応答 $h(\tau)$ になる.

相互相関関数とインパルス応答

25

では、自力で導出してみましょう！

線形システム

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)u(t-s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(s)h(t-s)ds\end{aligned}$$

相互相関関数とインパルス応答

26

入力の性質

$$R_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$$

デルタ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

白色雑音

27

$R_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$ となる入力 $u(t)$ のパワースペクトル

$$E(\omega) = |U(\omega)|^2 = \mathcal{F}[R_{uu}(\tau)] = \mathcal{F}[\delta(\tau)] = 1$$

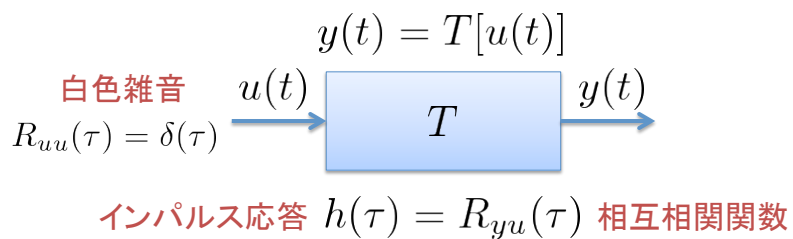


すべての周波数でエネルギーが等しい

白色雑音

相互相関関数とインパルス応答

28



白色雑音をシステムに入力し、入力と出力の相互相関関数を調べれば、システムの特性を表すインパルス応答がわかる。

Outline

29

- パーシバルの等式
- ウィーナー・ヒンチンの定理
- 相互相関関数とインパルス応答
- 宿題

宿題

30

1. 伝達関数 $H(\omega)$ で表される線形システムにパワースペクトル $E_u(\omega)$ を持つ入力 $u(t)$ を与えたとき、出力 $y(t)$ のパワースペクトル $E_y(\omega)$ を求めよ.

