工業数学F2
#8 熱伝導方程式を解く

京都大学　加納　学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻

Human Systems Lab., Dept. of Systems Science
Graduate School of Informatics, Kyoto University

復習1：パーシバルの等式

2

パーシバルの等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

三角関数系を直交基底とする「三平方の定理」

↓

フーリエ変換に拡張すると，どうなるか？

復習2：パーシバルの等式

3

パーシバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

時間領域での
エネルギー

周波数領域での
エネルギー

パワースペクトル（エネルギースペクトル）

$$E(\omega) = |F(\omega)|^2 = F(\omega)F^*(\omega)$$

復習3：ウィーナー・ヒンチンの定理

4

パワースペクトル $E(\omega) = |F(\omega)|^2 = F(\omega)F^*(\omega)$

自己相関関数 $R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt$

ウィーナー・ヒンチンの定理

$$E(\omega) = \mathcal{F}[R_{ff}(\tau)]$$
$$R_{ff}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[E(\omega)]$$

復習4：相互相関関数

5

相互相関関数 $$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)dt$$

関数 $f(t)$ と関数 $g(t)$ がどの程度似ているかを表す，
時間シフト τ の関数

$f(t) = g(t)$ の場合の相互相関関数が自己相関関数

復習5：まとめ

6

時間領域

$f(t)$

自己相関関数

$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

ウィーナー・ヒンチンの定理

$$E(\omega) = \mathcal{F}[R_{ff}(\tau)]$$
$$R_{ff}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[E(\omega)]$$

$F(\omega)$

パワースペクトル

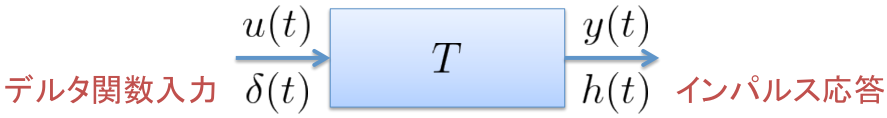
$$E(\omega) = |F(\omega)|^2$$

周波数領域

パーシバルの等式 $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

復習6：相互相関関数とインパルス応答

$$y(t) = T[u(t)]$$



$$h(t) = T[\delta(t)]$$

$R_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$ のとき

相互相関関数 $R_{yu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)u(t-\tau)dt$

はインパルス応答 $h(\tau)$ になる.

復習7：白色雑音

$R_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$ となる入力 $u(t)$ のパワースペクトル

$$E(\omega) = |U(\omega)|^2 = \mathcal{F}[R_{uu}(\tau)] = \mathcal{F}[\delta(\tau)] = 1$$

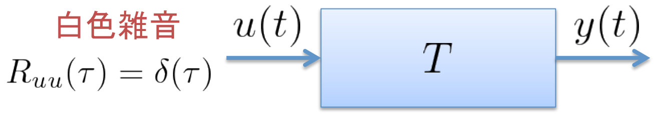
すべての周波数でエネルギーが等しい

白色雑音

復習8：相互相関関数とインパルス応答

9

$$y(t) = T[u(t)]$$



インパルス応答 $h(\tau) = R_{yu}(\tau)$ 相互相関関数

白色雑音をシステムに入力し，入力と出力の
相互相関関数を調べれば，システムの特性を
表すインパルス応答がわかる．

Outline

10

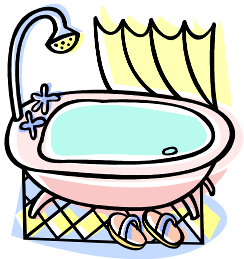
- 偏微分方程式
- 1次元熱伝導方程式の解
- 宿題

偏微分方程式

11

- 微分方程式
  - 常微分方程式： 独立変数が1つ
  - 偏微分方程式： 独立変数が2つ以上

世の中の現象は4次元時空間 (t, x, y, z) で起こる.
つまり，対象の状態は時間 t と空間座標 x, y, z の関数である.
つまり，偏微分方程式で表される.



浴槽の水温 $u(t, x, y, z)$

水温が均一なら $u(t)$

偏微分方程式の分類

12

- 階数
  - 偏導関数の最高階

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

- 線形／非線形
  - 未知関数およびその偏導関数について1次式なら線形，そうでないなら非線形
- 同次／非同次
  - 既知関数のみの項があれば非同次，なければ同次

$u_{xx} + u_{yy} = \sin t$ 2階線形非同次偏微分方程式

分類の演習

13

階数，線形／非線形，同次／非同次？

$$
\begin{aligned}
u_t + uu_x - u_{xx} &= 0 \\
u_{tt} - u_{xx} &= u \\
u_t - u^2 u_x + u_{xxx} &= f(x,t) \\
u_{tt} - u_{xx} &= \sin t \\
u_{tt} - u_{xx} &= \sin u \\
u_t - xu_x &= 0
\end{aligned}
$$

偏微分方程式の解

14

- 偏微分方程式の解
  - 方程式を恒等的に満足する関数

偏微分方程式	一般解
$u_t = 0$	$u(t,x) = f(x)$
$u_{tx} = 0$	$u(t,x) = f(t) + g(x)$

一般に n 階の偏微分方程式を解くと，n 個の任意関数を含む解が得られる．この解を一般解といい，任意関数を含まない解を特解という．

重ね合わせの原理

15

線形同次偏微分方程式では，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が解ならば，
その1次結合 $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ も解となる．

↓

三角関数の重ね合わせによって現象を解析しようとする
フーリエ級数やフーリエ変換の理論を線形偏微分方程式
に適用することが可能になり，統一的な取り扱いができる．

2階定数係数線形偏微分方程式の分類

16

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g(x,y)$$

主要部: $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$

特性方程式　$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$

判別式　$D = b^2 - ac$

$D > 0$	双曲型	$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$	波動方程式
$D = 0$	放物型	$u_t - ku_{xx} = 0$	熱伝導（拡散）方程式
$D < 0$	楕円型	$u_{xx} + u_{yy} = 0$	ラプラスの方程式

参考

17

楕円　　放物線　　双曲線

Outline

18

- 偏微分方程式
- 1次元熱伝導方程式の解
- 宿題

19

1次元熱伝導方程式（拡散方程式）

$$u_t - ku_{xx} = 0$$

長さ $2L$ の金属棒の温度分布

$u(x,t)$

$x = 0$ $\qquad$ $x = 2L$

初期条件 $\quad u(x, t = 0) = f(x)$

周期的境界条件 $\quad u(0, t) = u(2L, t)$

フーリエ級数を発見するきっかけと
なったのが，熱伝導の問題である．

20

フーリエの方法

初期値問題

$$u_t - ku_{xx} = 0$$

初期条件 $\quad u(x, t = 0) = f(x)$

周期的境界条件 $\quad u(0, t) = u(2L, t)$

変数分離法 $\quad u(x,t) = X(x)T(t)$

$$XT' = kX''T$$

$$\frac{1}{k}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = c \quad \text{定数}$$

フーリエの方法

21

$$\frac{1}{k}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = c$$ 定数

変数分離法によって，偏微分方程式が
2つの常微分方程式に分離される．

$$X'' - cX = 0$$

$$T' - ckT = 0$$

フーリエの方法

22

X について解く．

$$X'' - cX = 0$$

一般解 $X(x) = a\cos px + b\sin qx$

$$X'' - cX = -a(p^2 + c)\cos px - b(q^2 + c)\sin qx$$
$$= 0$$

$$c = -p^2 = -q^2$$
$$p = q$$

フーリエの方法

23

境界条件 $X(0) = X(2L)$

$$X(0) = a$$

$$X(2L) = a\cos 2pL + b\sin 2pL$$

$$\cos 2pL = 1 \quad \sin 2pL = 0$$

$$2p_nL = 2n\pi \qquad c_n = -p_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

フーリエの方法

24

一般解 $X(x) = a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$

$$T' - ckT = 0$$

一般解 $T_n(t) = se^{c_nkt} = se^{-kp_n^2t}$

$$u_0(x,t) = \frac{a_0}{2}$$

$$u_n(x,t) = \left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-kp_n^2t}$$

フーリエの方法

25

$u(x,t) =$

重ね合わせの原理

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right) e^{-kp_n^2 t}$$

初期条件 $u(x, t=0) = f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right)$$

フーリエ級数展開

フーリエ級数展開

26

Fourier (1768–1830)

任意の関数は，三角関数の級数で
表すことができる

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

フーリエ級数展開は，性質の不明な関数を，性質の
明らかな三角関数の重ね合わせで表す方法である．

1次元熱伝導方程式の初期値問題

27

初期値問題

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

初期条件 $u(x, t = 0) = f(x)$

周期的境界条件 $u(0, t) = u(2L, t)$

1次元熱伝導方程式の解

28

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) e^{-k p_n^2 t}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

演習

29

初期値問題

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

初期条件 $u(x, t=0) = f(x)$

境界条件 $u(0, t) = u(L, t) = 0$

では，自力で解いてみましょう！

Outline

30

- 偏微分方程式
- 1次元熱伝導方程式の解
- 宿題

宿題

1. 演習を仕上げる.