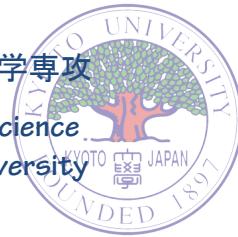


工業数学F2

#9 サンプル値をフーリエ変換する

京都大学 加納 学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻
Human Systems Lab., Dept. of Systems Science
Graduate School of Informatics, Kyoto University



復習1: 複素フーリエ級数展開

2

周期 2π の周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

複素フーリエ係数 $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

復習2: 一般の周期関数のフーリエ級数展開

3

周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

複素フーリエ係数 $c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx$

周期 2π から周期 $2L$ への変換 $x \rightarrow \frac{\pi x}{L}$

復習3: 公式

4

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

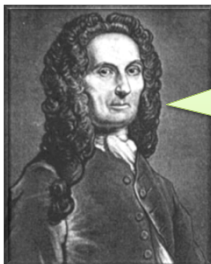
レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler)
(1707-1783)



ド・モアブルの公式

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$



アブラーム・ド・モアブル (Abraham de Moivre)
(1667-1754)

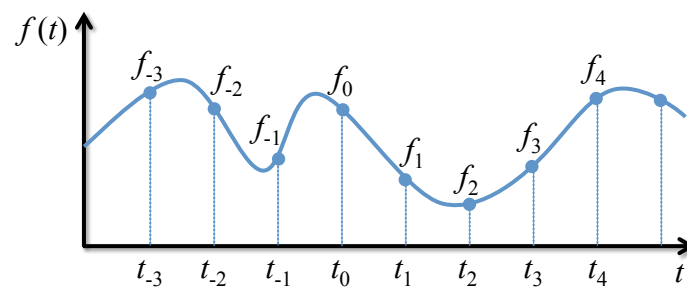
Outline

5

- サンプルング定理
- 離散フーリエ変換
- 周期関数のサンプルング定理
- 宿題

サンプル値と補間

6



サンプル点 $\{t_k\}$ サンプル値 $\{f_k\}$

サンプル間隔 $\tau = t_k - t_{k-1}$

補間 : サンプル値のみから連続関数を再現すること

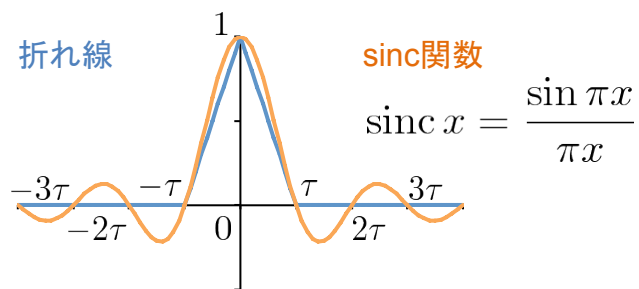
できるのだろうか？

補間関数

7

サンプル間隔 τ の補間関数

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & (t = 0) \\ 0 & (t = \pm\tau, \pm2\tau, \pm3\tau, \dots) \end{cases}$$



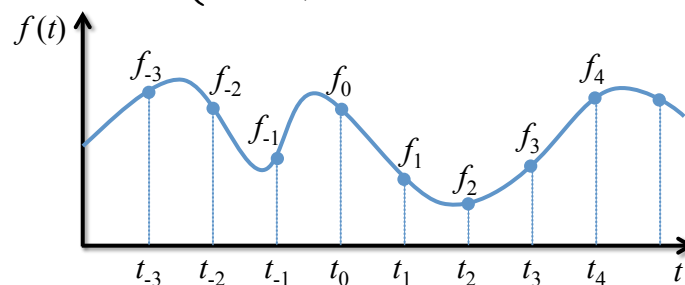
補間関数による表現

8

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \phi(t - t_k)$$

$\{f_k\}$ サンプル値

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & (t = 0) \\ 0 & (t = \pm\tau, \pm2\tau, \pm3\tau, \dots) \end{cases}$$

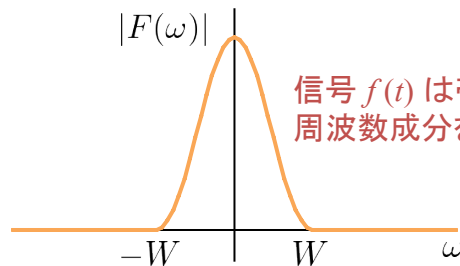


帯域制限

9

信号 $f(t)$ は帯域幅 W に帯域制限されている。

$$F(\omega) = 0 \quad (|\omega| \geq W)$$



信号 $f(t)$ は帯域幅 W 以上の
周波数成分を持たない。

フーリエ変換
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

シャノンのサンプリング定理

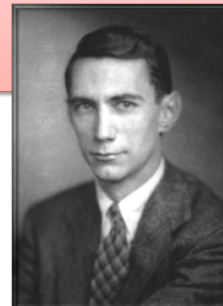
10

サンプリング定理

帯域幅 W に帯域制限された信号 $f(t)$ は、
サンプル間隔 $\tau = \pi/W$ のサンプル点 $\{t_k\}$ での
サンプル値 $\{f_k\}$ のみから次式で再現される。

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \operatorname{sinc} \frac{t - t_k}{\tau}$$

クロード・エルウッド・シャノン
(Claude Elwood Shannon)
(1916-2001)



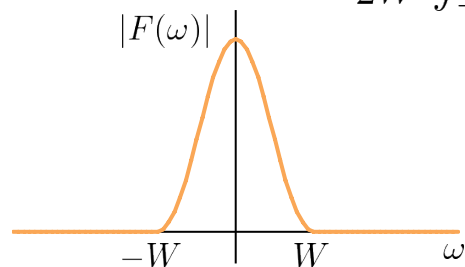
サンプリング定理の導出

11

区間 $[-W, W]$ でフーリエ変換をフーリエ級数展開する.

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\pi k\omega/W}$$

$$c_k = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W F(\omega) e^{-i\pi k\omega/W} d\omega$$



サンプリング定理の導出

12

$$c_k = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W F(\omega) e^{-i\pi k\omega/W} d\omega$$

$$= \frac{\pi}{W} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega(-\pi k/W)} d\omega$$

$$= \frac{\pi}{W} f(-\pi k/W)$$

$$= \tau f(-k\tau)$$

$$= \tau f_{-k}$$

帯域制限

$$F(\omega) = 0$$

$$|\omega| \geq W$$

フーリエ逆変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

サンプル点 $\{t_k\}$ サンプル値 $\{f_k\}$

$$\text{サンプル間隔 } \tau = \frac{\pi}{W}$$

サンプリング定理の導出

13

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\pi k\omega/W} \\
 &= \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{-k} e^{ik\tau\omega} \\
 &= \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-ik\tau\omega} \\
 &= \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-it_k\omega}
 \end{aligned}$$

複素フーリエ係数

$$c_k = \tau f_{-k}$$

k の符号反転

$$t_k = k\tau$$

サンプリング定理の導出

14

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \left(\tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-it_k\omega} \right) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{\tau}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \int_{-W}^W e^{i(t-t_k)\omega} d\omega \\
 &= \frac{\tau}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \int_{-W}^W \underbrace{\cos(t-t_k)\omega}_{\text{偶関数}} + i \underbrace{\sin(t-t_k)\omega}_{\text{奇関数}} d\omega
 \end{aligned}$$

帯域制限

$$F(\omega) = 0$$

$$|\omega| \geq W$$

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$



サンプリング定理の導出

15

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\tau}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \int_0^W \cos(t - t_k) \omega d\omega \\
 &= \frac{1}{W} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \left[\frac{\sin(t - t_k) \omega}{t - t_k} \right]_0^W \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{\sin W(t - t_k)}{W(t - t_k)} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \operatorname{sinc} \frac{W(t - t_k)}{\pi} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \operatorname{sinc} \frac{t - t_k}{\tau}
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

サンプル点 $\{t_k\}$

サンプル値 $\{f_k\}$

サンプル間隔 $\tau = \frac{\pi}{W}$

シャノンのサンプリング定理

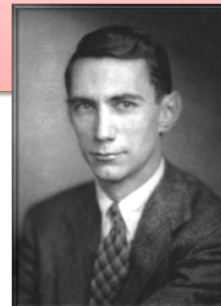
16

サンプリング定理

帯域幅 W に帯域制限された信号 $f(t)$ は、
サンプル間隔 $\tau = \pi/W$ のサンプル点 $\{t_k\}$ での
サンプル値 $\{f_k\}$ のみから次式で再現される。

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \operatorname{sinc} \frac{t - t_k}{\tau}$$

クロード・エルウッド・シャノン
(Claude Elwood Shannon)
(1916-2001)



ほんとか!?

17

離散的なサンプル値だけから、
として連続的な信号が復元できるのか？

サンプル点で同じ値をとる連続信号は無数にある。
それなのに、どうして一意に決まるのか？

あらゆる連続信号がサンプル値から再現
できるわけではない。

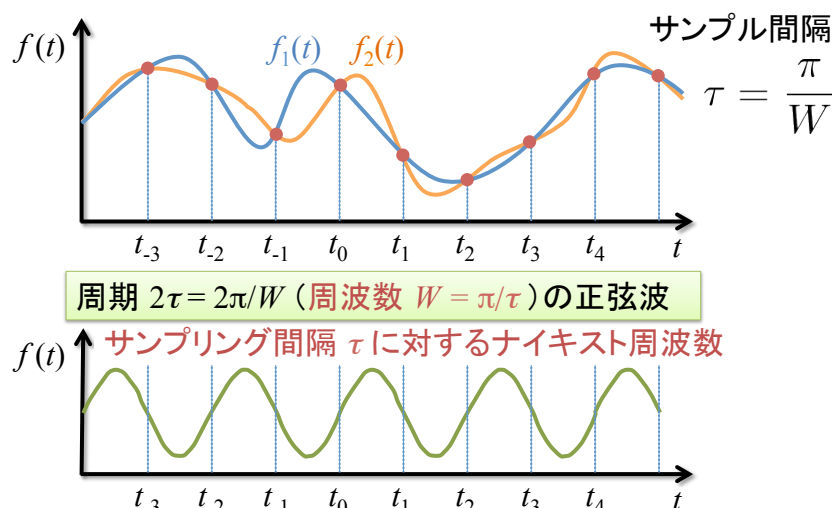
帯域幅 W に帯域制限された信号、つまり
帯域幅 W 以上の周波数成分を持たない
連続信号であれば再現できる。



シャノン (Shannon)

ナイキスト周波数

18



周期 τ でサンプリングすると、ナイキスト周波数
 $W = \pi/\tau$ 以上の周波数の信号はとらえられない。

Outline

19

- サンプルング定理
- 離散フーリエ変換
- 周期関数のサンプルング定理
- 宿題

離散フーリエ変換

20

周期 2π の周期関数 $f(x)$ について,
1周期を N 分割したサンプル点 x_n でのサンプル値を f_n とする.

$$f_n = f(x_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kn/N}$$

離散フーリエ変換 $F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$

$$x_n = \frac{2\pi n}{N} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

離散 vs. 連続

21

離散フーリエ変換
(周期 2π を N 分割)

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kn/N}$$

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$$

N 個のサンプル値 f_n を
 N 個の係数で表す.

複素フーリエ級数展開
(周期 T)

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx/T}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i2\pi kx/T} dx$$

関数 $f(x)$ を無限個の
複素フーリエ係数で表す.

離散フーリエ変換の導出

22

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kn/N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-i2\pi km/N} \right) e^{i2\pi kn/N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k(n-m)/N} \right)$$

$$= f_n$$

$n-m$ が N の倍数であれば, 1. そうでなければ, 0.
 $0 \leq n, m < N$ の範囲では $n = m$ のときのみ, 1.

補助

23

$n-m$ が N の倍数でない場合

$$e^{i2\pi(n-m)/N} \neq 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k(n-m)/N} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{i2\pi(n-m)/N} \right)^k \\ &= \frac{1 - \left(e^{i2\pi(n-m)/N} \right)^N}{1 - e^{i2\pi(n-m)/N}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{N-1}) = 1-x^N$$

離散フーリエ変換の性質

24

サンプル値 f_n とその離散フーリエ変換 F_k を周期的に拡張する.

$$f_{N+n} = f_n \quad F_{N+k} = F_k$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ について,
1周期を N 分割したサンプル点 x_n でのサンプル値を f_n とする.

$$f_n = f(x_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kn/N}$$

離散フーリエ変換 $F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$

離散フーリエ変換の性質

25

実数データ $\{f_n\}$ に対して $F_{-k} = F_k^*$

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$$

連続信号の場合

$$f(t) \text{ が実関数 } \Leftrightarrow F(-\omega) = F^*(\omega)$$

フーリエ変換
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

離散フーリエ変換の性質

26

実数データ $\{f_n\}$ に対して $F_{-k} = F_k^*$

$$F_{N+k} = F_k$$



$$F_{N-k} = F_{-k} = F_k^*$$

F_0	F_1	F_2	$\cdots$	F_{N-2}	F_{N-1}	F_N
F_N^*	F_{N-1}^*	F_{N-2}^*	$\cdots$	F_2^*	F_1^*	F_0^*

Outline

27

- サンプルング定理
- 離散フーリエ変換
- 周期関数のサンプルング定理
- 宿題

離散 vs. 連続

28

離散フーリエ変換
(周期 2π を N 分割)

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kn/N}$$

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$$

N 個のサンプル値 f_n を
 N 個の係数で表す。

複素フーリエ級数展開
(周期 T)

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx/T}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i2\pi kx/T} dx$$

関数 $f(x)$ を無限個の
複素フーリエ係数で表す。

離散フーリエ変換と複素フーリエ係数

29

周期 2π の周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

周期 2π の連続関数 $f(x)$ が

$$c_k = 0 \quad (|k| \geq \frac{N}{2})$$

のように**帯域制限**されているとき、区間 $[0, 2\pi]$ を N 等分して得られる離散フーリエ変換 F_k は $|k| < N/2$ において、複素フーリエ係数 c_k の N 倍に等しい。

導出

30

では、自力で導出してみましょう！

周期関数のサンプリング定理

31

周期 2π の連続関数 $f(x)$ が

$$c_k = 0 \quad (|k| \geq \frac{N}{2})$$

のように帯域制限されているとき, $f(x)$ は区間 $[0, 2\pi]$ を N 等分して得られるサンプル値 $\{f_n\}$ から次式で再現される.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \phi_N(x - x_n) \\ \phi_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{-N/2 < k < N/2} e^{ikx} \\ &= \frac{1 + 2 \sum_{0 < k < N/2} \cos kx}{N} \end{aligned}$$

導出

32

では, 自力で導出してみましょう!

導出

33

2つのサンプリング定理

34

周期関数の
サンプリング定理
(周期 2π を N 等分)

$$c_k = 0 \quad (|k| \geq \frac{N}{2})$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \phi_N(x - x_n)$$

$$\begin{aligned} \phi_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{-N/2 < k < N/2} e^{ikx} \\ &= \frac{1 + 2 \sum_{0 < k < N/2} \cos kx}{N} \end{aligned}$$

連続信号の
サンプリング定理
(サンプル間隔 $\tau = \pi/W$)

$$F(\omega) = 0 \quad (|\omega| \geq W)$$

ナイキスト周波数

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \operatorname{sinc} \frac{t - t_k}{\tau}$$

帯域制限された
信号はサンプル
値から再現できる

シャノン(Shannon)



Outline

35

- サンプルング定理
- 離散フーリエ変換
- 周期関数のサンプルング定理
- 宿題

宿題

36

1. 演習を仕上げる.
 - 離散フーリエ変換 F_k = 複素フーリエ係数 c_k
 - 周期関数のサンプルング定理

