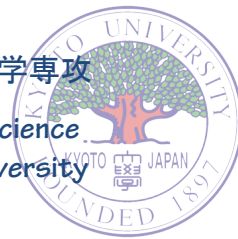


工業数学F2 #10 周期データを操る

京都大学 加納 学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻
Human Systems Lab., Dept. of Systems Science
Graduate School of Informatics, Kyoto University



復習：離散フーリエ変換

2

周期 2π の周期関数 $f(x)$ について,
1周期を N 分割したサンプル点 x_n でのサンプル値を f_n とする.

$$f_n = f(x_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kn/N}$$

離散フーリエ変換 $F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$

$$x_n = \frac{2\pi n}{N} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

Outline

3

- たたみこみ和
- 線形システム
- パーセバルの等式, パワースペクトル
- 自己相関関数, ウィーナー・ヒンチンの定理
- 宿題

復習: 合成積

4

関数 $f(t)$ と $g(t)$ の合成積

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(r)f(t-r)dr = g * f(t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[f * g(t)] = \mathcal{F}[f(t)]\mathcal{F}[g(t)]$$

合成積のフーリエ変換はフーリエ変換の積

たたみこみ和

5

周期 N のデータ f_n と g_n のたたみこみ和

$$f_n * g_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_{n-k}$$

$$\begin{aligned} f_n * g_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_{n-k} = \sum_{l=n-N+1}^n f_{n-l} g_l \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} g_l f_{n-l} = g_n * f_n \end{aligned}$$

たたみこみ和の離散フーリエ変換

6

たたみこみ和の離散フーリエ変換＝離散フーリエ変換の積

$$\sum_{n=0}^{N-1} (f_n * g_n) e^{-i2\pi kn/N} = F_k G_k$$

合成積のフーリエ変換＝フーリエ変換の積

$$\mathcal{F}[f * g(t)] = \mathcal{F}[f(t)] \mathcal{F}[g(t)]$$

導出7

では、自力で導出してみましょう！

導出8

Outline

9

- たたみこみ和
- 線形システム
- パーセバルの等式, パワースペクトル
- 自己相関関数, ウィーナー・ヒンチンの定理
- 宿題

復習：低域通過フィルタ

10

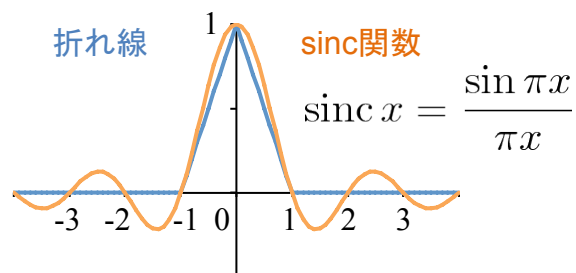
理想低域通過フィルタ

$$H(i\omega) = \begin{cases} Ae^{-i\tau\omega} & (|\omega| \leq \omega_f, \tau : constant) \\ 0 & (|\omega| > \omega_f) \end{cases}$$

遮断周波数

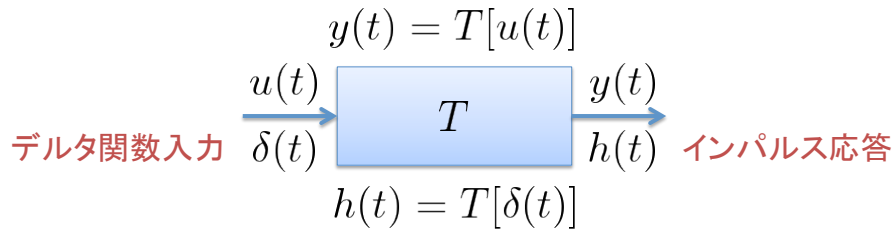
インパルス応答

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(i\omega)] = \frac{A\omega_f}{\pi} \text{sinc} \frac{\omega_f(t - \tau)}{\pi}$$



復習：インパルス応答

11



$$\begin{aligned}
 y(t) &= T[u(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(s)\delta(t-s)ds\right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} u(s)T[\delta(t-s)]ds = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)h(t-s)ds
 \end{aligned}$$

インパルス応答が既知であれば、
任意の入力に対する応答は合成積として求まる。

復習：伝達関数

12



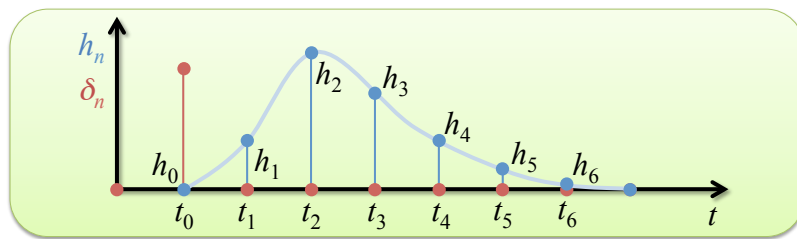
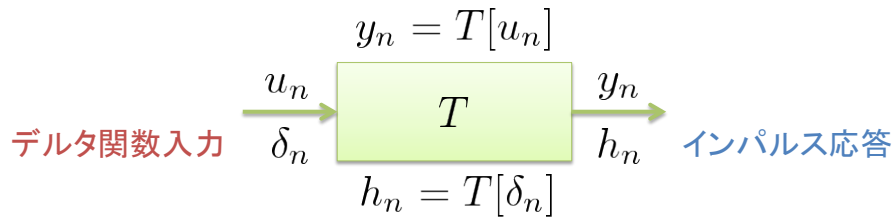
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{i\omega(t-s)}ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-i\omega s}dse^{i\omega t} \\
 &= \mathcal{F}[h]e^{i\omega t} = H(i\omega)e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

伝達関数＝インパルス応答のフーリエ変換

入力 $e^{i\omega t}$ が何倍となって出力に現れるかを示す

インパルス応答

13



$$y_n = T[u_n] = T\left[\sum_{l=0}^{N-1} u_l \delta_{n-l}\right] = \sum_{l=0}^{N-1} u_l h_{n-l} = u_n * h_n$$

伝達関数

14

システム T の伝達関数 H_k の定義:

$$u_n = e^{i2\pi kn/N} \rightarrow T \rightarrow y_n = H_k e^{i2\pi kn/N}$$

では、自力で導出してみましょう！

伝達関数＝インパルス応答のフーリエ変換

入力 $e^{i2\pi kn/N}$ が何倍となって出力に現れるかを示す

Outline

15

- たたみこみ和
- 線形システム
- パーセバルの等式, パワースペクトル
- 自己相関関数, ウィーナー・ヒンチンの定理
- 宿題

復習: パーシバルの等式

16

パーシバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

時間領域での
エネルギー

周波数領域での
エネルギー

パワースペクトル(エネルギースペクトル)

$$E(\omega) = |F(\omega)|^2 = F(\omega)F^*(\omega)$$

パーシバルの等式

17

周期 N のデータ f_n と g_n の離散フーリエ変換を F_k と G_k とする.

パーシバルの等式

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2$$

$$f_n = f(x_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kn/N}$$

$$\text{離散フーリエ変換 } F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$$

導出

18

では, 自力で導出してみましょう!

パワースペクトル

19

$$E_k = |F_k|^2 = F_k F_k^*$$

$$f_n \text{ が実数であれば } F_{-k} = F_k^*$$

$$E_{-k} = E_k$$

パワースペクトルは $k=0$ を中心に左右対称になる.

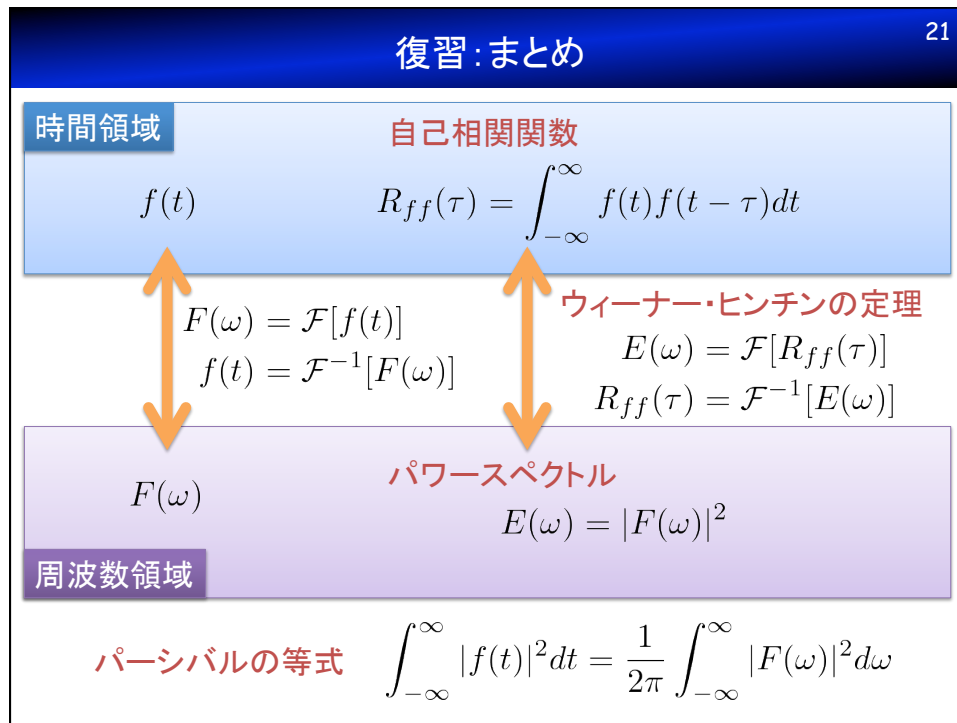
$$E(\omega) = |F(\omega)|^2 = F(\omega) F^*(\omega)$$

$$\text{離散フーリエ変換 } F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$$

Outline

20

- たたみこみ和
- 線形システム
- パーセバルの等式, パワースペクトル
- 自己相関関数, ウィーナー・ヒンチンの定理
- 宿題



22

自己相関関数

自己相関関数 $R_l = \sum_{n=0}^{N-1} f_n f_{n-l}^*$

$$\begin{aligned}
 R_{-l} &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n f_{n+l}^* \\
 &= \sum_{m=l}^{l+N-1} f_{m-l} f_m^* \\
 &= \left(\sum_{m=0}^{N-1} f_m f_{m-l}^* \right)^* = R_l^*
 \end{aligned}$$

ウィーナー・ヒンチンの定理

23

パワースペクトル $E_k = |F_k|^2 = F_k F_k^*$

自己相関関数 $R_l = \sum_{n=0}^{N-1} f_n f_{n-l}^*$

ウィーナー・ヒンチンの定理

$$E_k = \sum_{l=0}^{N-1} R_l e^{-i2\pi kl/N}$$

周期 N のデータ f_n の自己相関関数 R_l の
離散フーリエ変換は、パワースペクトルに等しい。

導出

24

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{N-1} R_l e^{-i2\pi kl/N} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f_n f_{n-l}^* \right) e^{-i2\pi kl/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \left(\sum_{l=0}^{N-1} f_{n-l}^* e^{-i2\pi kl/N} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \left(\sum_{l=0}^{N-1} f_{n-l} e^{i2\pi kl/N} \right)^* \end{aligned}$$

導出

25

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \left(\sum_{l=0}^{N-1} f_{n-l} e^{i2\pi kl/N} \right)^* \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \left(\sum_{m=n}^{n-N+1} f_m e^{i2\pi k(n-m)/N} \right)^* \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N} \right) \left(\sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-i2\pi km/N} \right)^* \\
 &= F_k F_k^* = E_k
 \end{aligned}$$

ウィーナー・ヒンチンの定理

26

パワースペクトル $E_k = |F_k|^2 = F_k F_k^*$

自己相関関数 $R_l = \sum_{n=0}^{N-1} f_n f_{n-l}^*$

ウィーナー・ヒンチンの定理

$$R_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E_k e^{i2\pi kl/N}$$

周期 N のデータ f_n のパワースペクトルの
離散フーリエ逆変換は、自己相関関数 R_l に等しい。

導出

27

では、自力で導出してみましょう！

まとめ

28

ウィーナー・ヒンチンの定理

$$E_k = \sum_{l=0}^{N-1} R_l e^{-i2\pi kl/N}$$

$$R_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E_k e^{i2\pi kl/N}$$

パワースペクトル $E_k = |F_k|^2 = F_k F_k^*$

自己相関関数 $R_l = \sum_{n=0}^{N-1} f_n f_{n-l}^*$

29

周期 N のデータ f_n に関するまとめ

時間領域

f_n

自己相関関数

$$R_l = \sum_{n=0}^{N-1} f_n f_{n-l}^*$$

$$R_l = \sum_{n=0}^{N-1} f_n f_{n-l}^*$$

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kn/N}$$

$$E_k = \sum_{l=0}^{N-1} R_l e^{-i2\pi kl/N}$$

$$R_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E_k e^{i2\pi kl/N}$$

F_k

周波数領域

パワースペクトル

$$E_k = |F_k|^2$$

$$E_k = |F_k|^2$$

パーシバルの等式

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2$$

30

Outline

- たたみこみ和
- 線形システム
- パーセバルの等式, パワースペクトル
- 自己相関関数, ウィーナー・ヒンチンの定理
- 宿題

宿題

31

1. 次の参考資料を読んで理解する.
 - 金谷健一, これなら分かる応用数学教室, 共立出版, 2003
「第4章 離散フーリエ解析」
 - 高速フーリエ変換や離散コサイン変換も理解すること.
 - 参考資料と講義スライドでは, 離散フーリエ変換の定義 ($1/N$ をどちらの式に書くか)に加えて, いくつかの記号が異なるので注意すること.
2. 「高速フーリエ変換」の概要をレポートにまとめて提出する.
 - A4紙2頁以内にまとめること.

