工業数学F2
#11 離散フーリエ変換を高速化する

京都大学　加納 学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻

Human Systems Lab., Dept. of Systems Science
Graduate School of Informatics, Kyoto University

前回の宿題

1. 次の参考資料を読んで理解する.
   - 金谷健一，これなら分かる応用数学教室，
     共立出版，2003
     「第4章　離散フーリエ解析」
   - 高速フーリエ変換や離散コサイン変換も理解すること.
   - 参考資料と講義スライドでは，離散フーリエ変換の定義（$1/N$ をどちらの式に書くか）に加えて，いくつかの記号が異なるので注意すること.

2. 「高速フーリエ変換」の概要をレポートにまとめて提出する.
   - A4紙2頁以内にまとめること.

復習：離散フーリエ変換

3

周期 2π の周期関数 $f(x)$ について，
1周期を N 分割したサンプル点 x_n でのサンプル値を f_n とする.

$$f_n = f(x_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kn/N}$$

離散フーリエ変換 $$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$$

$$x_n = \frac{2\pi n}{N} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

Outline

4

- 1の原始N乗根
- 高速フーリエ変換
- 宿題

1の原始N乗根

5

1の原始N乗根（N乗して初めて1になる数）

$$w_N = e^{i2\pi/N}$$

$$w_N^N = 1$$
$$w_N^k \neq 1 \quad (k = 1, 2, \cdots, N-1)$$

オイラーの公式
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler）
（1707-1783 ）

1の原始N乗根

6

1の原始N乗根 $\quad w_N = e^{i2\pi/N}$

Nが偶数のとき

$$w_N^{N/2} = (e^{i2\pi/N})^{N/2} = e^{i\pi} = -1$$

$$w_N^{N/2+k} = -w_N^k$$

$$w_N^2 = (e^{i2\pi/N})^2 = e^{i2\pi/(N/2)} = w_{N/2}$$

1の原始N乗根 ： 回転因子

1の原始N乗根（回転因子）

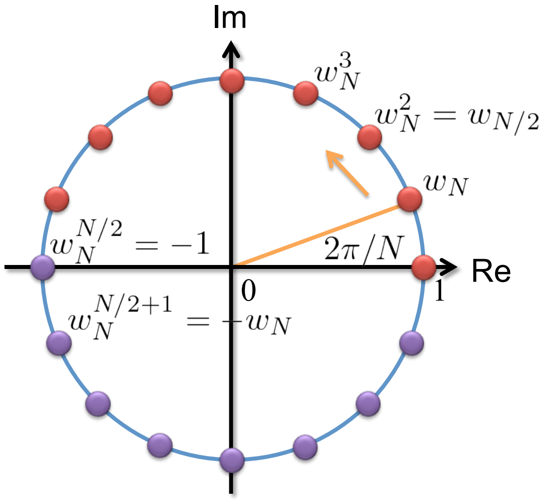
$$w_N = e^{i2\pi/N}$$

Nが偶数のとき

$$w_N^{N/2} = -1$$

$$w_N^{N/2+k} = -w_N^k$$

$$w_N^2 = w_{N/2}$$



後半は前半 $N/2$ 点の符号を反転させたもの

Outline

- 1の原始N乗根
- 高速フーリエ変換
- 宿題

高速フーリエ変換

9

- 高速フーリエ変換（Fast Fourier Transform; FFT）
  - 離散フーリエ変換を高速化するアルゴリズム.
  - 1805年頃，カール・ガウス（Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855）によってアルゴリズムが開発されたが，この業績は広く知られなかった.
  - 1965年に，ジェイムズ・クーリー（James W. Cooley）とジョン・テューキー（John W. Tukey）が独自に導出したアルゴリズムと計算機への実装方法を発表したことにより，FFTは脚光を浴びた.
  - Cooley-Tukey型アルゴリズムの他にも，複数のアルゴリズムがある.

カール・ガウス（Johann Carl Friedrich Gauss）
（1777-1855）

離散フーリエ変換の行列表現

10

離散フーリエ変換

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_N^{-kn}$$

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^{-1} & w_N^{-2} & \cdots & w_N^{-(N-1)} \\ 1 & w_N^{-2} & w_N^{-4} & \cdots & w_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{-(N-1)} & w_N^{-2(N-1)} & \cdots & w_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

バタフライの導出

$$
\begin{aligned}
F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_N^{-kn} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} w_N^{-k(2m)} + \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} w_N^{-k(2m+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} w_N^{-k(2m)} + w_N^{-k} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} w_N^{-k(2m)} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} w_{N/2}^{-km} + w_N^{-k} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} w_{N/2}^{-km}
\end{aligned}
$$

バタフライの導出

$$
F_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} w_{N/2}^{-km} + w_N^{-k} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} w_{N/2}^{-km}
$$

$$
\Downarrow \quad w_N^{N/2+k} = -w_N^k
$$

$$
F_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} w_{N/2}^{-km} + w_N^{-k} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} w_{N/2}^{-km}
$$

$$
F_{N/2+k} = \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} w_{N/2}^{-km} - w_N^{-k} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} w_{N/2}^{-km}
$$

$$
(k = 0, 1, 2, \cdots, N/2-1)
$$

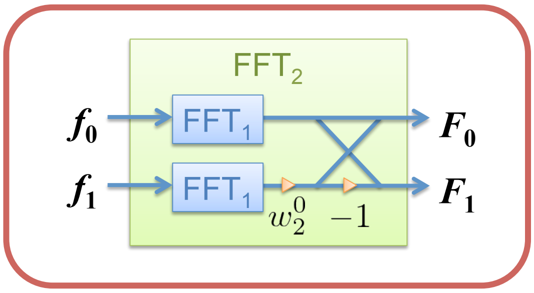
計算量半減

バタフライ（N=2）

13

$$F_0 = f_0 w_1^0 + w_2^0 f_1 w_1^0 = f_0 + f_1$$
$$F_1 = f_0 w_1^0 - w_2^0 f_1 w_1^0 = f_0 - f_1$$

バタフライ



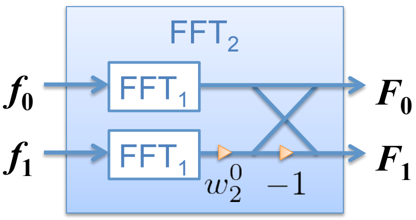
FFT$_1$ $\quad F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_N^{-kn}$ $\quad N=1 \quad$ $F_0 = f_0 w_1^0 = f_0$

バタフライ（N=4）

14

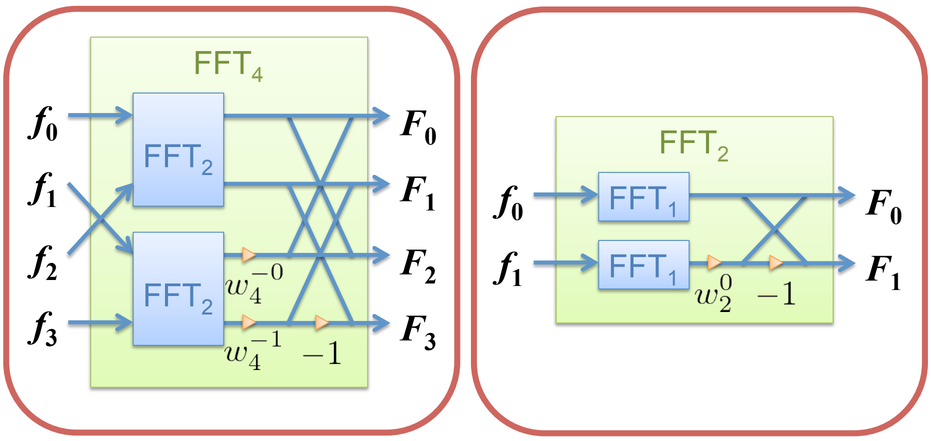
$$F_k = \sum_{m=0}^{1} f_{2m} w_2^{-km} + w_4^{-k} \sum_{m=0}^{1} f_{2m+1} w_2^{-km}$$
$$F_{2+k} = \sum_{m=0}^{1} f_{2m} w_2^{-km} - w_4^{-k} \sum_{m=0}^{1} f_{2m+1} w_2^{-km}$$
$$(k = 0, 1)$$

FFT$_2$ $\quad F_k = \sum_{n=0}^{1} f_n w_2^{-kn}$



バタフライ（N =4）

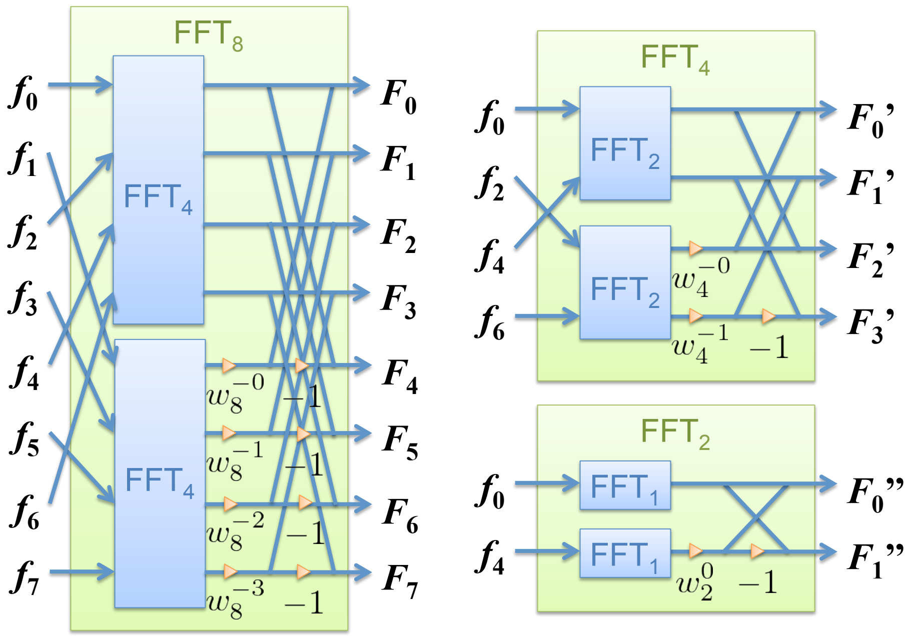
15



バタフライ（N=4）　　バタフライ（N=2）

バタフライ（N =8）

16



Outline

17

- 1の原始*N*乗根
- 高速フーリエ変換
- 宿題

宿題

18

1. 「高速フーリエ変換（FFT）」の応用例を1つ選択し，レポートにまとめて提出する．
   - A4紙2頁以内にまとめること．
   - 応用例の概要（その技術の目的や装置構成など）を分かり易く述べること．
   - 応用例において，どのようにFFTが活用されているかを明確に述べること．