工業数学F2
#12 離散フーリエ変換を実数で

京都大学　加納 学

京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻
Human Systems Lab., Dept. of Systems Science,
Graduate School of Informatics, Kyoto University

復習：離散フーリエ変換

周期 2π の周期関数 $f(x)$ について，
1周期を N 分割したサンプル点 x_n でのサンプル値を f_n とする．

$$f_n = f(x_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kn/N}$$

離散フーリエ変換　$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$$

$$x_n = \frac{2\pi n}{N} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

復習：回転因子（1の原始N乗根）

3

1の原始N乗根（回転因子）

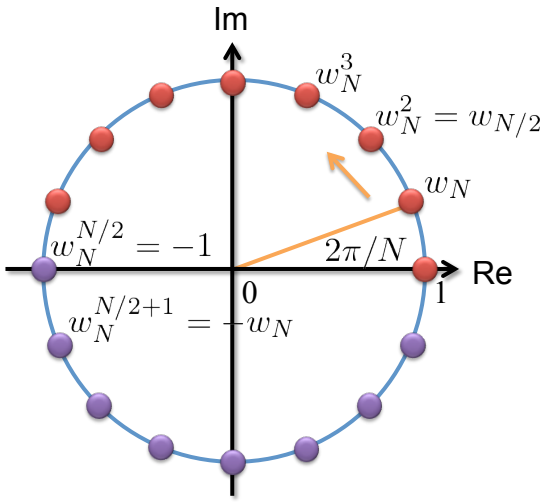
$$w_N = e^{i2\pi/N}$$

Nが偶数のとき

$$w_N^{N/2} = -1$$

$$w_N^{N/2+k} = -w_N^k$$

$$w_N^2 = w_{N/2}$$



後半は前半 $N/2$ 点の符号を反転させたもの

復習：離散フーリエ変換の行列表現

4

離散フーリエ変換

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_N^{-kn}$$

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^{-1} & w_N^{-2} & \cdots & w_N^{-(N-1)} \\ 1 & w_N^{-2} & w_N^{-4} & \cdots & w_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{-(N-1)} & w_N^{-2(N-1)} & \cdots & w_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

でも，これ，複素数の計算ですよね？　実数でできないんですか？

Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

Outline 5

- 離散コサイン変換
- 離散フーリエ変換の例

サンプル値の拡張 6

N 個のサンプル点 $\{x_n\}$ でのサンプル値を $\{f_n\}$ とする.

$$f_0, f_1, f_2, \cdots, f_{N-1}$$

このまま離散フーリエ変換すると，複素数になる.
そこで，左右対称になるように拡張する.

$$f_{N-1}, \cdots, f_2, f_1, f_0, f_0, f_1, f_2, \cdots, f_{N-1}$$

これで $2N$ 個のサンプル値が得られたので，
改めて別の記号で書く.

$$g_{-N}, g_{-N+1}, \cdots, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, \cdots, g_{N-1}$$

Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

拡張サンプル値の離散フーリエ変換

7

$$g_{-N}, g_{-N+1}, \cdots, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, \cdots, g_{N-1}$$

離散フーリエ変換 $F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N}$

$$\begin{aligned} G_k &= \sum_{n=-N}^{N-1} g_n e^{-i2\pi kn/2N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-i\pi kn/N} + \sum_{n=-N}^{-1} g_n e^{-i\pi kn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-i\pi kn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} g_{-n-1} e^{-i\pi k(-n-1)/N} \end{aligned}$$

拡張サンプル値の離散フーリエ変換

8

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-i\pi kn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} g_{-n-1} e^{-i\pi k(-n-1)/N} \\ &= e^{i\pi k/2N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\pi k(n+1/2)/N} + \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{i\pi k(n+1/2)/N} \\ &= 2e^{i\pi k/2N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \frac{e^{-i\pi k(2n+1)/2N} + e^{i\pi k(2n+1)/2N}}{2} \end{aligned}$$

f_{N-1}	f_{N-2}	$\cdots$	f_1	f_0	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_{N-1}
g_{-N}	g_{-N+1}	$\cdots$	g_{-2}	g_{-1}	g_0	g_1	g_2	$\cdots$	g_{N-1}

Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

拡張サンプル値の離散フーリエ変換

9

$$= 2e^{i\pi k/2N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \frac{e^{-i\pi k(2n+1)/2N} + e^{i\pi k(2n+1)/2N}}{2}$$

$$= 2e^{i\pi k/2N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\frac{\pi k(2n+1)}{2N}$$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

離散コサイン変換

$$F_k = \frac{1}{2} e^{-i\pi k/2N} G_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\frac{\pi k(2n+1)}{2N}$$

拡張サンプル値の逆離散フーリエ変換

10

$$g_n = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} G_k e^{i2\pi kn/2N}$$

逆離散フーリエ変換

$$= \frac{1}{2N} G_0 + \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{N-1} G_k e^{i\pi kn/N} + \frac{1}{2N} \sum_{k=-N+1}^{-1} G_k e^{i\pi kn/N}$$

$$= \frac{1}{2N} G_0 + \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{N-1} G_k e^{i\pi kn/N} + \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{N-1} G_{-k} e^{-i\pi kn/N}$$

$$G_{-N} = \sum_{n=-N}^{N-1} g_n e^{i\pi n} = \sum_{n=-N}^{N-1} (-1)^n g_n = 0$$

f_{N-1}	f_{N-2}	$\cdots$	f_1	f_0	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_{N-1}
g_{-N}	g_{-N+1}	$\cdots$	g_{-2}	g_{-1}	g_0	g_1	g_2	$\cdots$	g_{N-1}

Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

拡張サンプル値の逆離散フーリエ変換

11

$$= \frac{1}{2N}G_0 + \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N-1} G_k e^{i\pi kn/N} + \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N-1} G_k^* e^{-i\pi kn/N}$$

$$= \frac{1}{N}F_0 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} e^{i\pi k/2N} F_k e^{i\pi kn/N}$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} (e^{i\pi k/2N} F_k)^* e^{-i\pi kn/N}$$

離散コサイン変換

$$F_k = \frac{1}{2}e^{-i\pi k/2N}G_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\frac{\pi k(2n+1)}{2N}$$

拡張サンプル値の逆離散フーリエ変換

12

$$= \frac{1}{N}F_0 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} F_k e^{i\pi k(2n+1)/2N}$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} F_k e^{-i\pi k(2n+1)/2N}$$

$$= \frac{1}{N}F_0 + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1} F_k \frac{e^{i\pi k(2n+1)/2N} + e^{-i\pi k(2n+1)/2N}}{2}$$

$$= \frac{1}{N}F_0 + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1} F_k \cos\frac{\pi k(2n+1)}{2N}$$

Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

離散コサイン変換

13

離散コサイン変換

$$F_k = \frac{1}{2} e^{-i\pi k/2N} G_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos \frac{\pi k(2n+1)}{2N}$$

逆離散コサイン変換

$$f_n = \frac{1}{N} F_0 + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} F_k \cos \frac{\pi k(2n+1)}{2N}$$

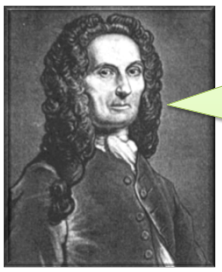
実数だけになった！

離散サイン変換

14

離散コサイン変換を参考にして，離散サイン変換を導出せよ．

N 個のサンプル値 $\{f_n\}$ をどのように拡張するか．



ド・モアブルの公式

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

アブラーム・ド・モアブル（Abraham de Moivre）
（1667-1754）

Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

離散サイン変換

15

Outline

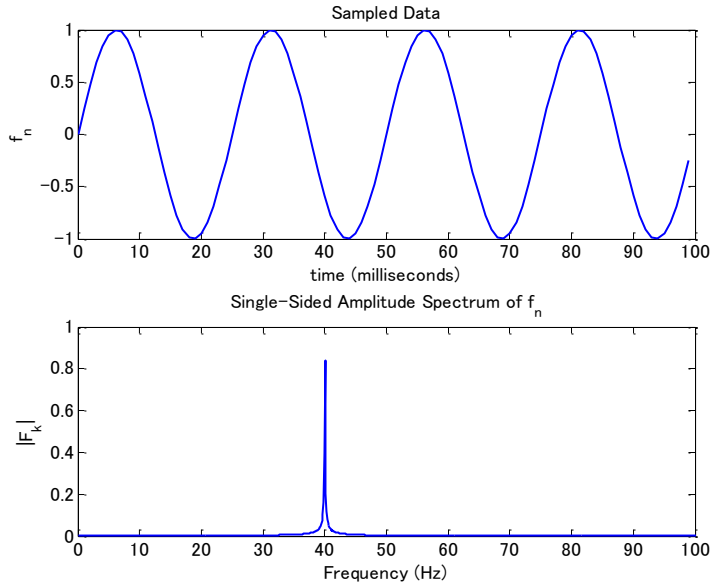
16

- 離散コサイン変換
- 離散フーリエ変換の例

Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

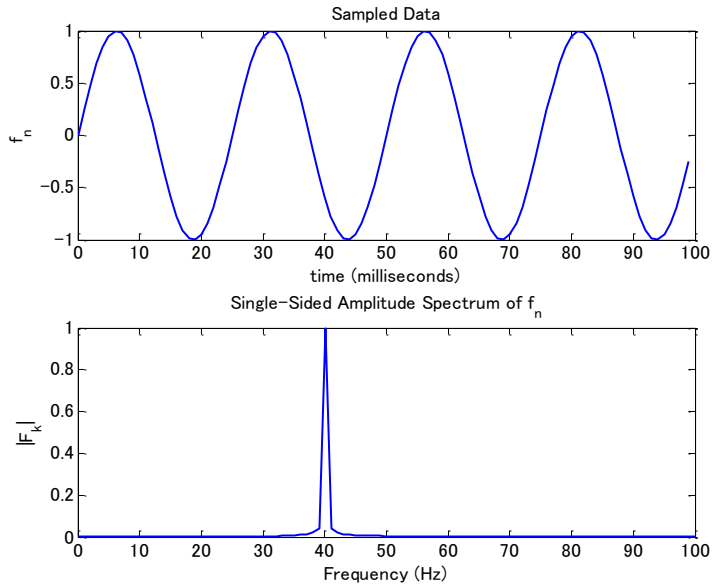
例：40 Hz, 8192 points

17



例：40 Hz, 1024 points

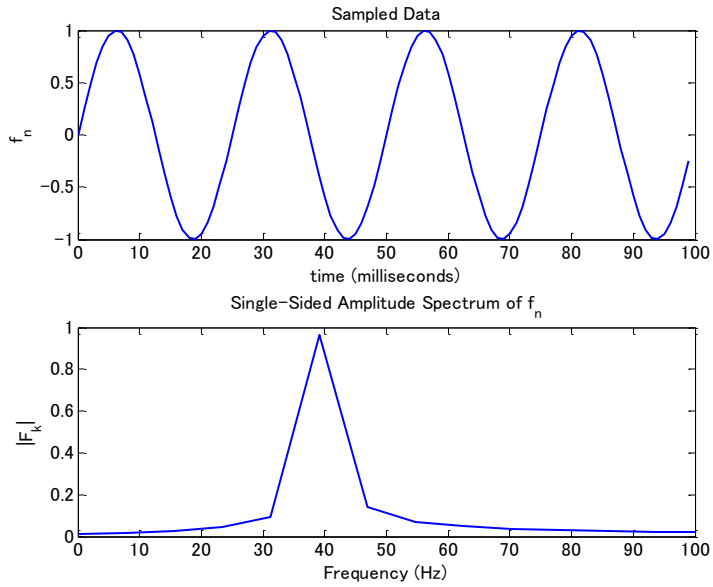
18



Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

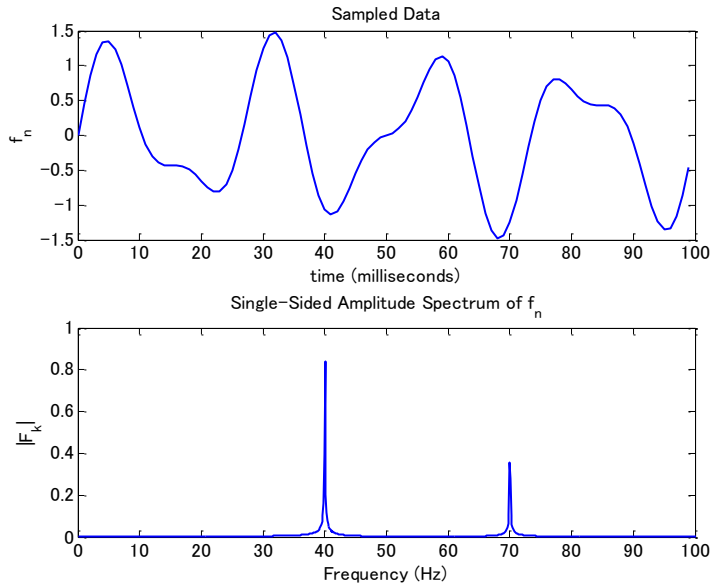
例：40 Hz, 128 points

19



例：40 Hz (1.0) + 70 Hz (0.5), 8192 points

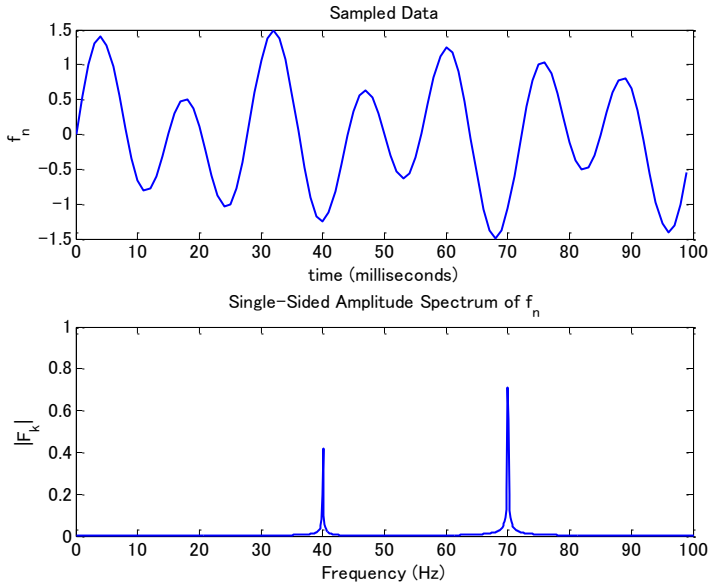
20



Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

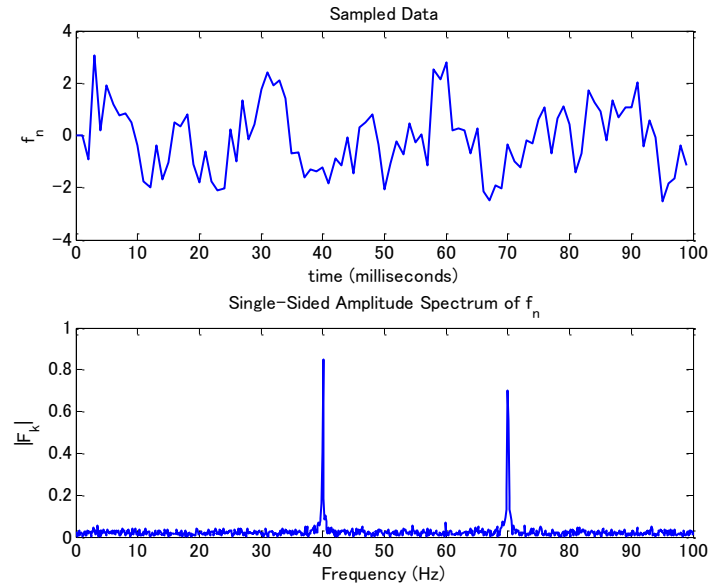
例：40 Hz (0.5) + 70 Hz (1.0), 8192 points

21



例：40 Hz + 70 Hz + noise, 8192 points

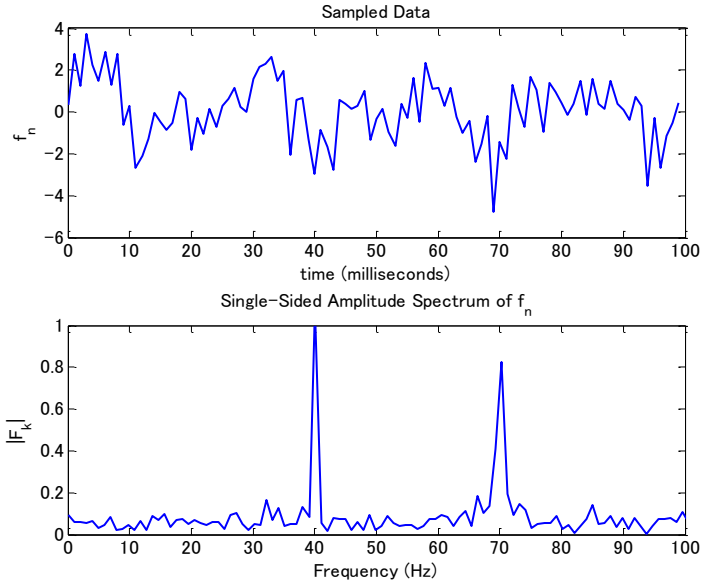
22



Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

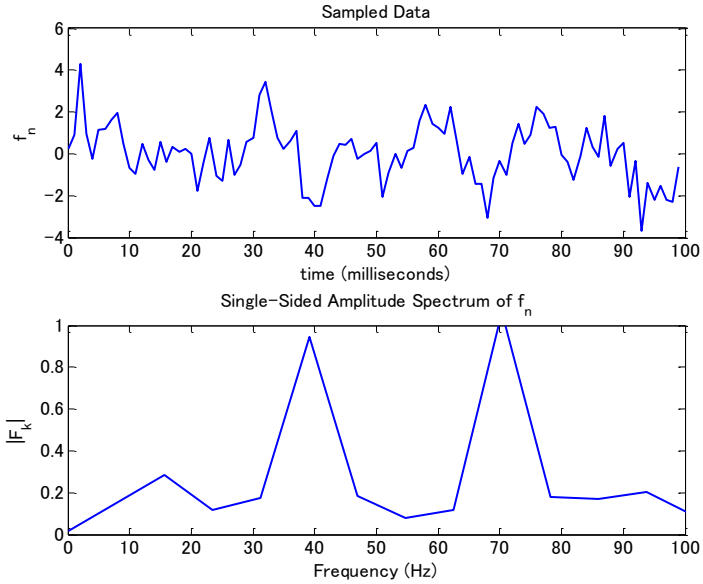
例：40 Hz + 70 Hz + noise, 1024 points

23



例：40 Hz + 70 Hz + noise, 128 points

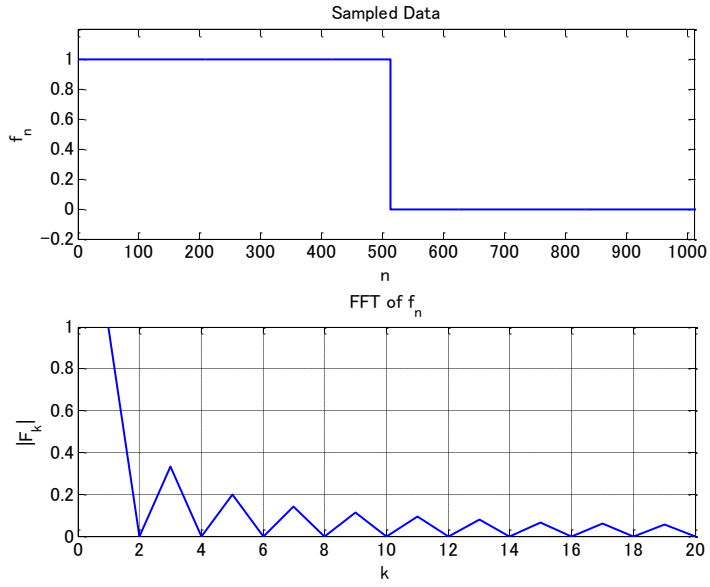
24



Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

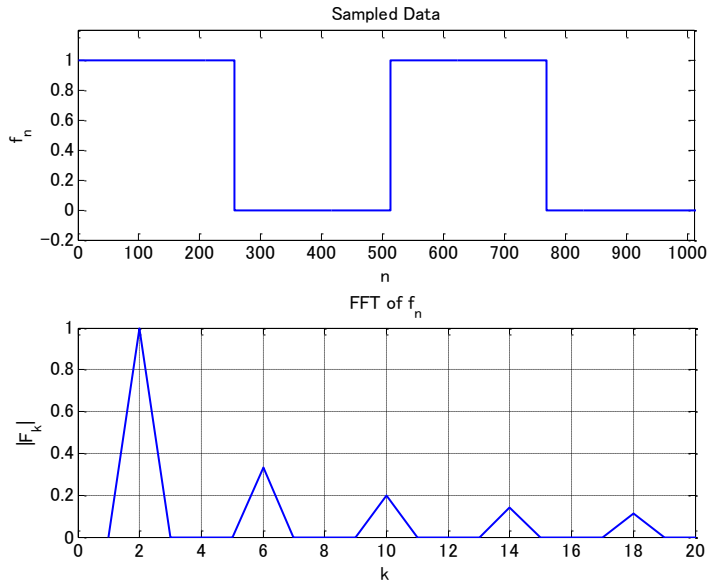
例：矩形波, 1024 points

25



例：矩形波2つ, 1024 points

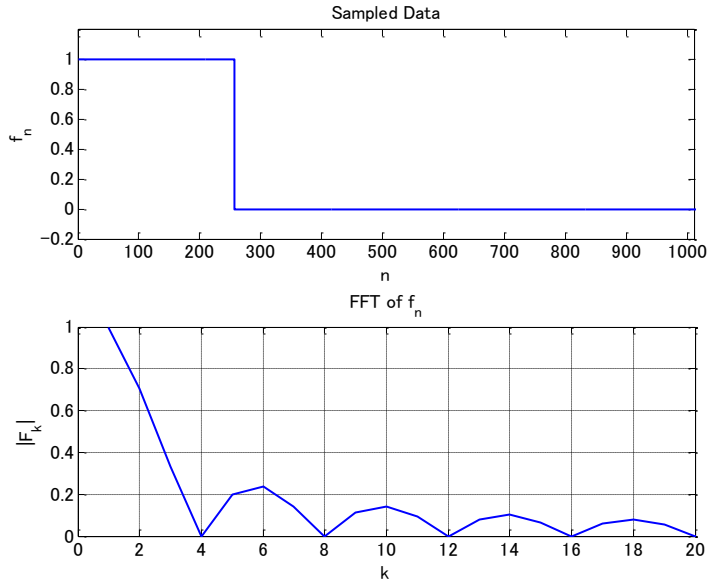
26



Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

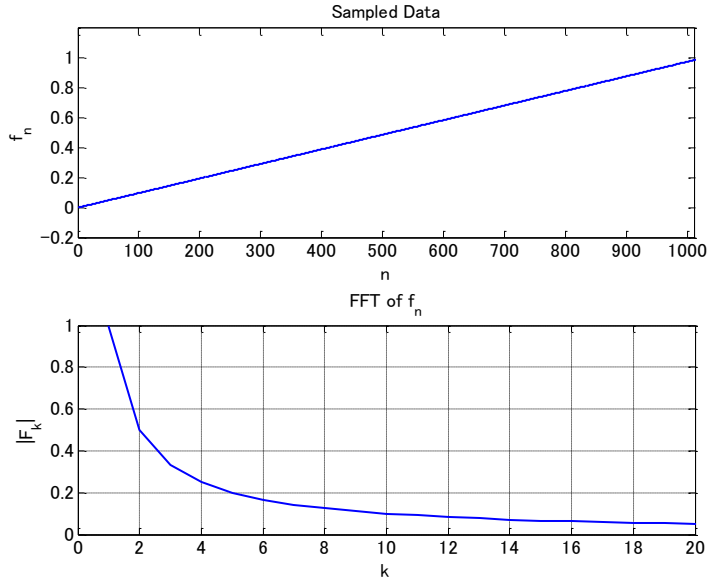
例：崩れた矩形波，1024 points

27



例：鋸歯状波，1024 points

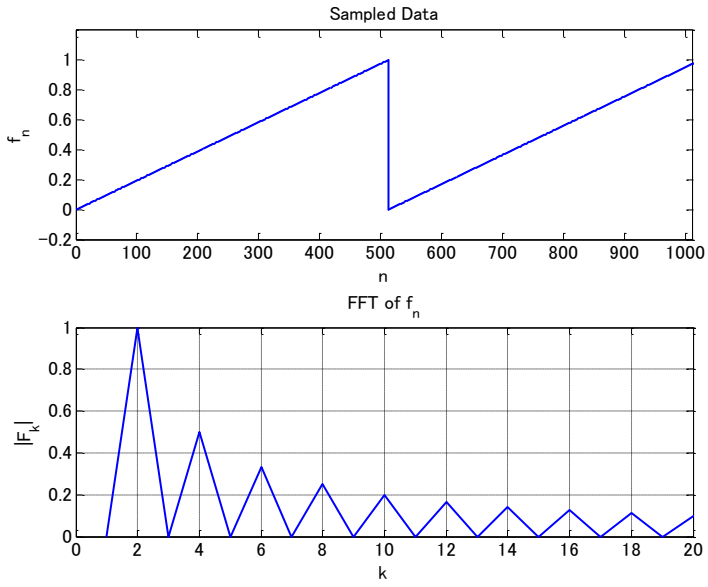
28



Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

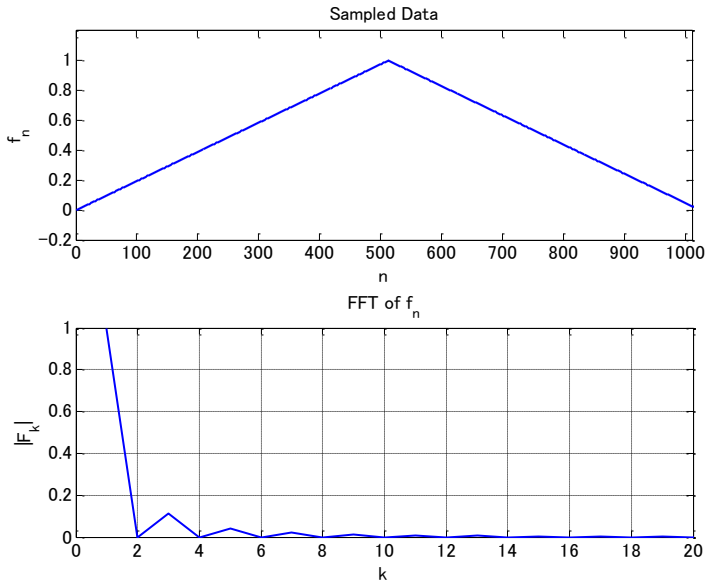
例：鋸歯状波2つ, 1024 points

29



例：三角波, 1024 points

30



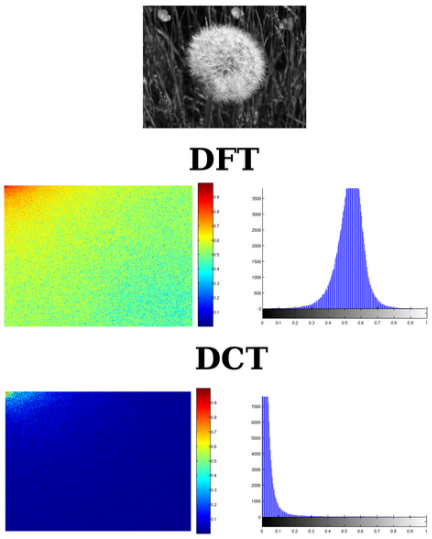
Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

離散コサイン変換の応用例

31

画像圧縮JPEG

- 画像を固定サイズ（8×8画素）のブロックに分割し，そのブロック単位で離散コサイン変換（DCT）を用いて，空間領域から周波数領域へ変換する．
- DCTでは情報量は削減されないが，低周波数成分にエネルギーが集まることを利用して，量子化による情報量削減と，エントロピー符号化による圧縮率向上を行う．



（Wikipediaより引用）

デジカメ

32

1千万画素！

JPEG
圧縮率は1/10～1/100程度

1千万画素のアナログ・デジタル変換（AD変換）は必要か？

Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.

連絡

33

- 7月16日（火）
  - 最終回です.
  - 講義全体の復習をします.
- 7月30日（火）
  - 期末試験です.
  - 持込不可です.

Copyright © 2012-2015 Manabu Kano.
All rights reserved.