02．点推定と区間推定

京都大学　加納　学

Division of Process Control & Process Systems Engineering
Department of Chemical Engineering, Kyoto University

manabu@cheme.kyoto-u.ac.jp
http://www-pse.cheme.kyoto-u.ac.jp/~kano/

母数を定めるのが推定

- 推定
  データを用いて未知である母数を数値として定める作業
  - 点推定
    未知母数をある一つの値で推定する方法
  - 区間推定
    ある確率で未知母数が存在しうる範囲を推定する方法

推定値は，たまたまその値が計算されただけ．
利用するデータが変われば，推定値も変わる．
バラツキが大きい場合には，推定値を信用するのは危険．

推定値のバラツキを考慮して，
そのとりうる範囲を求める区間推定が必要になる．

推定量と推定値

- **推定量**
  未知母数 θ を推定するために用いる統計量 $\hat{\theta}$

- **推定値**
  データから定めた推定量の値

母平均　　　　標本平均

データから計算した標本平均の値

推定量が満たすべき性質

- 推定値を求めなさいと言われて，みんながデタラメに答えたら収拾がつかなくなる.
- 推定量は，いくつかの性質を満たさなければならない.
  - 不偏性
  - 一致性
  - 有効性

不偏性

- 不偏性
  推定量の期待値が真値である母数に一致する性質.
  推定量が母数を中心にばらついていることを意味する.

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

- 不偏推定量
  - 標本平均は不偏推定量
  - 標本分散は不偏推定量（自由度 N–1 で割れば）

$$E(\hat{\mu}) = E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E(x_n) = \mu$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = E(s^2) = E\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})^2\right) = \sigma^2$$

一致性

- 一致性
  データ数を無限に増やすと，推定量が母数に近づいていく（バラツキが小さくなる）性質．

- 一致推定量
  - 標本平均や標本分散は一致推定量
  - 多くの推定量が一致性を持つ．

有効性

- 有効性
  推定量の分散が小さいこと.
  - 分散が小さいと，推定量は母数の近辺に集中するため，有効である.
  - 不偏性と一致性を備えた2つの推定量があるとき，その優劣を判断する重要な指標となる.

- 有効推定量
  分散が最小である推定量

区間推定

- **区間推定**
  - ある確率 1–α で未知母数 θ が存在しうる範囲 [L, U] を推定する方法

$$\Pr(\underbrace{L \le \theta \le U}_{100(1-\alpha)\%\text{信頼区間}}) = \underbrace{1-\alpha}_{\text{信頼係数（信頼率）}}$$

L：下側信頼限界　U：上側信頼限界

  - あるデータから推定した信頼区間に母数が含まれるかどうかは，〇か×か，二者択一の問題でしかない．
  - 信頼区間とは，データの抽出と信頼区間の推定を何回も繰り返したならば，試行全体の100(1–α)%において，母数が信頼区間に含まれるという意味である．

母分散が既知である場合の母平均の推定

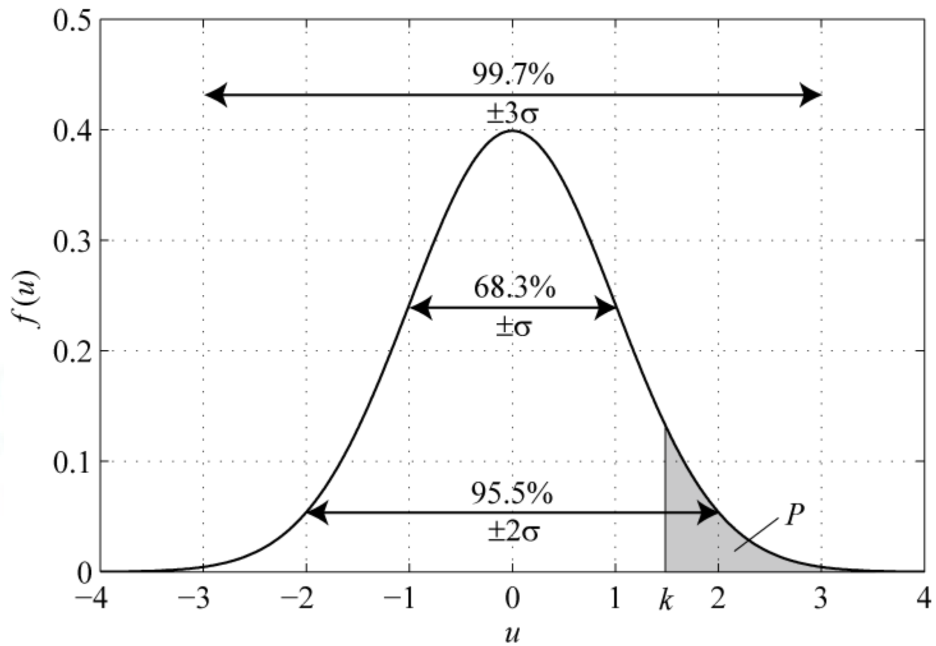
- x_n が N(μ, σ²) に従う互いに独立な確率変数であるとき
  - 標本平均

$$\bar{x} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right)$$

標本数

  - 標準化

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$$



  - 100(1−α)%信頼区間

$$\left[\bar{x} - \underline{Z_{\alpha/2}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \bar{x} + \underline{Z_{\alpha/2}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]$$

標準正規分布の上側確率が100(α /2)%となる点

例：　母平均の95%信頼区間

- データ取得　$\{x_n | n = 1, 2, \cdots, N\}$
- 信頼率95%（上側確率=下側確率=0.025）を正規分布表で読む

正規分布表

k	0	1.0	1.645	1.960
P	0.5000	0.1587	0.0500	0.0250

$$P(k = 1.960) = 0.025$$

$$\Pr(-1.960 \leq u \leq 1.960) = 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$$

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{N}}$$ を代入＆式変形

$$\Pr\left(\bar{x} - 1.960\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.960\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = 0.95$$

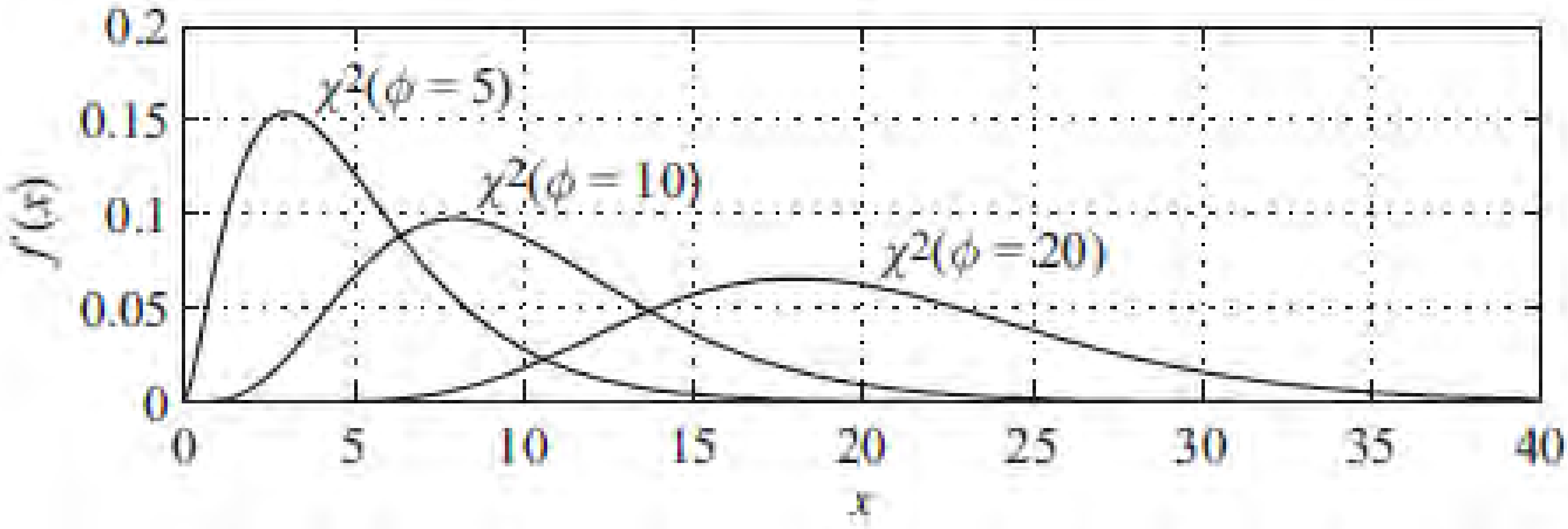
母分散の区間推定

- 標準正規分布 N(0, 1^2) に従う互いに独立な ϕ 個の確率変数の平方和は，自由度 ϕ の χ^2 分布に従う.

- x_n が N(μ, σ^2) に従う互いに独立な確率変数であるとき

$$\chi^2 = \frac{(N-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(N-1)$$

  - 自由度 $\phi = N-1$ は標本分散の自由度に等しい



母分散の区間推定

- $\chi^2(\phi)$ の上側100P%点
  上側確率が P となる値 $\chi^2(\phi, P)$

$$P = \Pr(\chi^2 \geq \chi^2(\phi, P))$$

- 100(1−α)%信頼区間

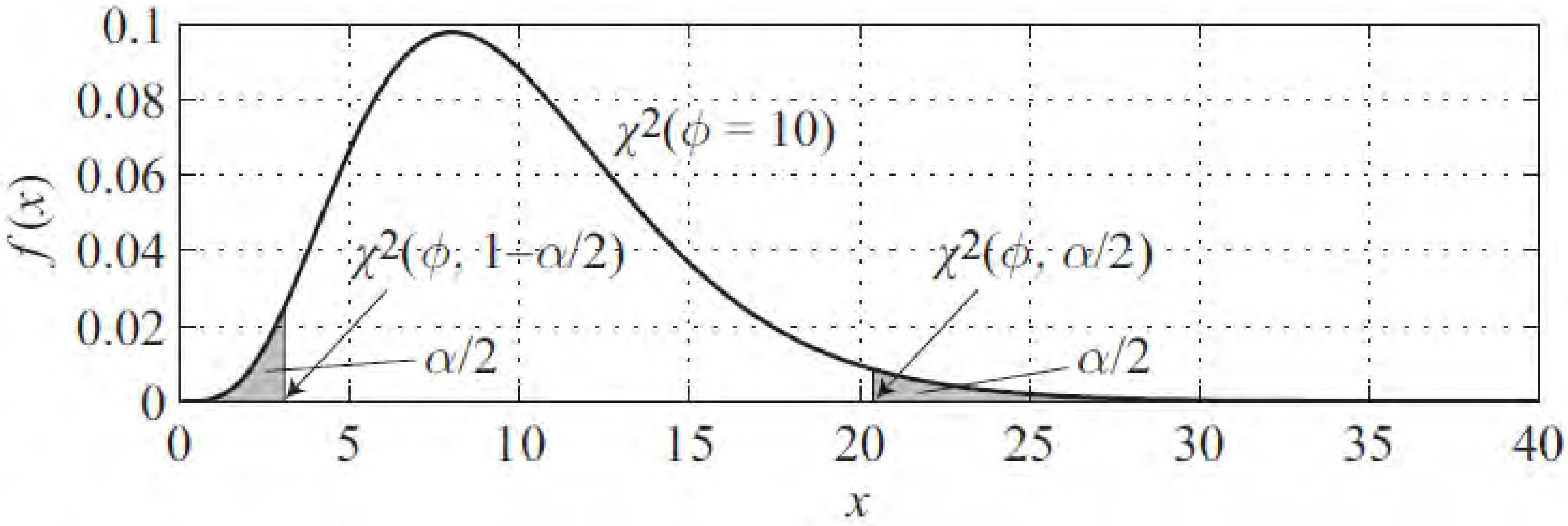
$$\left[\frac{(N-1)s^2}{\chi^2(N-1,\alpha/2)}, \frac{(N-1)s^2}{\chi^2(N-1,1-\alpha/2)}\right]$$

$$\Pr(\chi^2(N-1,1-\alpha/2) \leq \chi^2 \leq \chi^2(N-1,\alpha/2)) = 1-\alpha$$

$$\chi^2 = \frac{(N-1)s^2}{\sigma^2}$$ を代入＆式変形

$$\Pr\left(\frac{(N-1)s^2}{\chi^2(N-1,\alpha/2)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(N-1)s^2}{\chi^2(N-1,1-\alpha/2)}\right) = 1-\alpha$$

カイ二乗分布



χ^2分布表

	N	10	20	30	40	50
α=0.05	$\chi^2(N-1, 1-\alpha/2)$	2.700	8.907	16.05	23.65	31.55
	$\chi^2(N-1, \alpha/2)$	19.02	32.85	45.72	58.12	70.22
α=0.01	$\chi^2(N-1, 1-\alpha/2)$	1.735	6.844	13.12	20.00	27.25
	$\chi^2(N-1, \alpha/2)$	23.59	38.58	52.34	65.48	78.23

変数の相関関係を調べる

- 相関分析
  変数の相関関係を調べる統計的手法
  - 相関係数の計算
  - データ数が少ないとき，相関係数は広い範囲の値をとりうる．そこで，母相関係数についての情報を得るために，相関係数の区間推定を行う．

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}^2}{s_x s_y} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n - \bar{x}}{s_x}\frac{y_n - \bar{y}}{s_y}$$

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E((x-\mu_x)(y-\mu_y))}{\sqrt{E((x-\mu_x)^2)E((y-\mu_y)^2)}}$$

相関係数の区間推定

- 相関係数の z 変換

$$z = z(r_{xy}) = \frac{1}{2}\log\frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}}$$

$$\zeta = z(\rho_{xy}) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho_{xy}}{1-\rho_{xy}}$$

  - 逆変換

$$\rho_{xy} = z^{-1}(\zeta) = \frac{e^{2\zeta}-1}{e^{2\zeta}+1}$$

  - z は N が大きいときに近似的に正規分布に従う.

$$z \sim \mathrm{N}\left(\zeta, \frac{1}{N-3}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{N-3}(z-\zeta) \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$$

相関係数の区間推定

- 母相関係数 ρ_{xy} の100(1−α)%信頼区間

$$\Pr(-Z_{\alpha/2} \le \sqrt{N-3}(z-\zeta) \le Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

式変形

$$\Pr\left(z - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{N-3}} \le \zeta \le z + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{N-3}}\right) = 1-\alpha$$

逆 z 変換 $\rho_{xy} = z^{-1}(\zeta)$

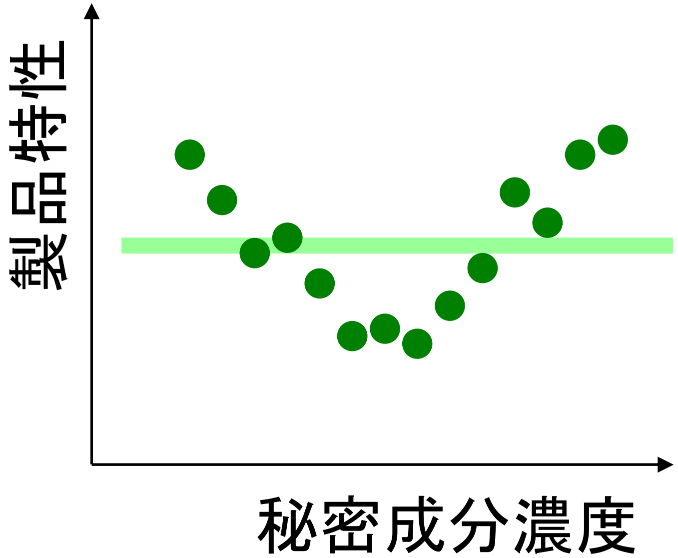
$$[z^{-1}(\zeta_1),\, z^{-1}(\zeta_2)]$$

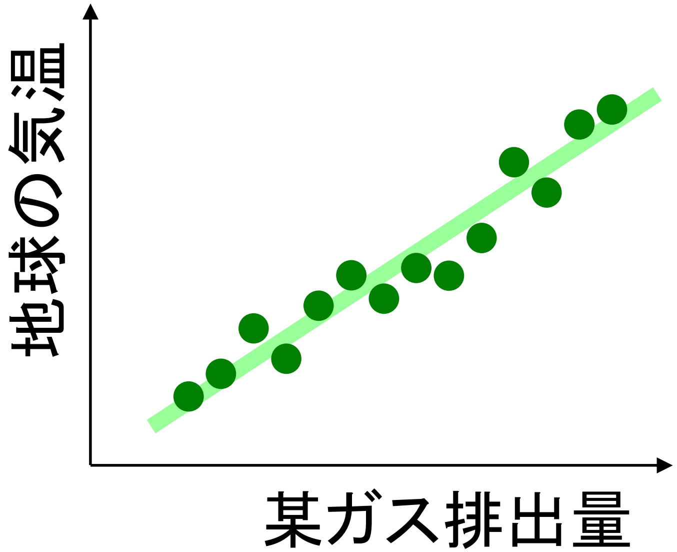
$$\zeta_1 = z - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{N-3}}$$

$$\zeta_2 = z + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{N-3}}$$

相関係数についての注意

- 直線的な関係の有無しかわからない．
- たまたま相関係数が大きくなることがある．（偽相関）
- 因果関係はわからない．





無相関だが，
適切な濃度がある．

某ガス排出量が増えて，
気温が上がった？
気温が上がって，某ガスが
海水に溶けなくなった？

工程能力指数

- 工程能力
  プロセスが品質基準を満たす製品を製造できる能力

- 工程能力指数
  - 上限規格SUと下限規格SLが与えられている場合

$$C_p = \frac{SU - SL}{6\sigma}$$

  - 一方のみが与えられている場合

$$C_{pu} = \frac{SU - \mu}{3\sigma} \qquad C_{pl} = \frac{\mu - SL}{3\sigma}$$

  - もっとも無難な指標

$$C_{pk} = \min\left(C_{pu}, C_{pl}\right)$$

工程能力指数

- 工程能力指数の解釈
  - 1.33 以上　　工程能力は十分である
  - 1.00～1.33　工程能力はあるが十分でない
  - 1.00 以下　　工程能力が不足している

- 工程能力指数の点推定
  - 母数の代わりに推定値を使用する.

工程能力指数の区間推定

- 工程能力指数の区間推定
  - C_p の100(1−α)%信頼区間

$$\left[\sqrt{\frac{\chi^2(N-1,1-\alpha/2)}{N-1}}\hat{C}_p\,,\ \sqrt{\frac{\chi^2(N-1,\alpha/2)}{N-1}}\hat{C}_p\right]$$

  - C_{pu} , C_{pl} の100(1−α)%信頼区間

$$\left[\hat{C}_p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{C}_p^2}{2(N-1)}+\frac{1}{9N}}\,,\ \hat{C}_p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{C}_p^2}{2(N-1)}+\frac{1}{9N}}\right]$$

シックスシグマ

- シックスシグマ
  - 不良品の発生を100万回中3回以下に抑える.
  - 品質特性が正規分布に従う場合，$\mu \pm 6\sigma$ が上下限規格に一致するほどバラツキを小さくできたなら，規格外の製品が製造される確率は10億分の2となる.
  - 現実には，品質特性の平均が規格の中心から 1.5σ まではずれていても構わないとする.
  - この場合，品質特性の平均と規格の差は 4.5σ となり，規格外品が製造される確率は100万分の3，工程能力指数では

    $$C_{pk} = 4.5\sigma / 3\sigma = 1.5$$

    となる.
  - シックスシグマの目標は，工程能力指数 C_{pk} を1.5以上にすることと同義である.