

# プロセス制御工学

## 2. プロセスモデル

京都大学 加納 学

Division of Process Control & Process Systems Engineering  
Department of Chemical Engineering, Kyoto University

manabu@cheme.kyoto-u.ac.jp

<http://www-pse.cheme.kyoto-u.ac.jp/~kano/>



- プロセスモデルの構築
- ラプラス変換

- プロセス制御を実現するためには、プロセスの入力変数（操作変数と外乱）が変化したときに出力変数（制御変数）が時間的にどのように変化するか、すなわちプロセスの**動特性**を表現できるモデルが必要である。
- プロセス設計に利用されるモデルは、定常状態における変数間の関係を表現するものであり、動特性は無視されている場合が多い。



- アクセルやブレーキと車速の関係を知らなかったら、どうなるだろうか？

- **物理モデル（現象論的モデル）**  
物理や化学の法則に基づいて化学プロセスの動特性を一連の微分方程式や代数方程式で表現するモデル
- **ブラックボックスモデル（統計的モデル）**  
プロセスの運転データから導出されるモデル  
例えば、操作変数を人為的に変化させることによって、操作変数が制御変数に与える影響を知ることができるため、そのときの入出力データからモデルを構築できる。  
**システム同定**: 入出力データから統計的モデルを構築すること
- グレイボックスモデル＝現象論的モデル＋統計的モデル

- プロセスの動特性を表現するためには、プロセスの状態を表す変数(状態変数)とその時間的変化を表す数式(状態方程式)が必要である。

例) 物質収支式や熱収支式などのプロセス方程式

$$\text{状態方程式} \quad \frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad \text{状態変数} \quad x$$

- 初期状態  $x_0$  と入力  $u$  が与えられれば、プロセスの状態が変化する様子を知ることができる。

- プロセス方程式が 1 階微分方程式で与えられるとは限らないが、状態変数の 1 階から  $n-1$  階微分までを状態変数に加えることにより、 $n$  階微分方程式に変形できる。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} = g(y, u)$$

$$\Downarrow \quad x_1 = y, \quad x_2 = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g(x_1, u) - ax_2 \end{bmatrix}$$

■ 定常状態

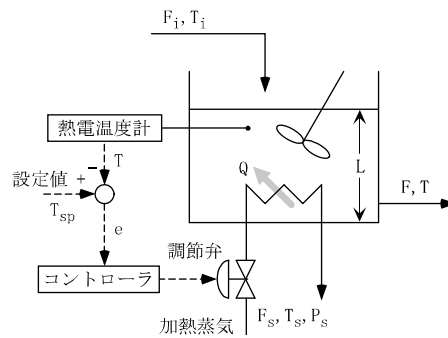
状態変数が時間的に変化しない状態

$$0 = f(\tilde{x}, \tilde{u})$$

■ 非定常状態

状態変数が時間的に変化する状態

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$



物質収支

$$\rho A \frac{dL}{dt} = \rho F_i - \rho F$$

エネルギー収支

$$\rho c_p A \frac{d(LT)}{dt} = \rho c_p F_i T_i - \rho c_p F T + Q$$

物質収支  $A \frac{dL}{dt} = F_i - F$

エネルギー収支  $A \frac{d(LT)}{dt} = F_i T_i - FT + \frac{Q}{\rho c_p}$

$$A \frac{d(LT)}{dt} = AL \frac{dT}{dt} + AT \frac{dL}{dt} = AL \frac{dT}{dt} + T(F_i - F)$$

$$AL \frac{dT}{dt} = F(T_i - T) + \frac{Q}{\rho c_p}$$

状態方程式

$$A \frac{dL}{dt} = F_i - F$$

$$AL \frac{dT}{dt} = F(T_i - T) + \frac{Q}{\rho c_p}$$

状態変数

$L$

$T$

■ プロセス自由度

プロセスの定常状態を決めるために必要十分な変数の数, あるいは互いに独立に変化させることのできる変数の数

$$\text{プロセス自由度} = \text{変数の数} - \text{式の数}$$

■ 制御自由度

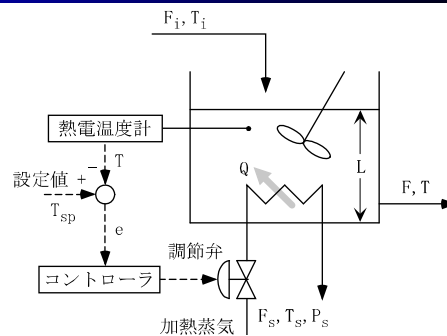
制御可能な変数の数

$$\text{制御自由度} = \text{プロセス自由度} - \text{外部条件変数の数}$$

状態方程式

$$A \frac{dL}{dt} = F_i - F$$

$$AL \frac{dT}{dt} = F(T_i - T) + \frac{Q}{\rho c_p}$$



$$\text{プロセス自由度} = \text{変数の数} - \text{式の数}$$

$$4 = 6 - 2$$

$$\text{制御自由度} = \text{プロセス自由度} - \text{外部条件変数の数}$$

$$2 = 4 - 2$$

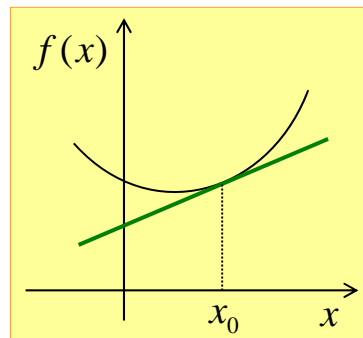
- 化学プロセスの物理モデルの多くは非線形微分方程式で与えられる。しかし、プロセスが狭い条件範囲で運転される場合には、線形モデルによって非線形モデルを十分な精度で近似できる。
- プロセスをある定常状態に保つことが目的である場合には、その定常点周りでのプロセスの動特性は線形近似したモデルを用いて表現できるため、その線形モデルに基づいて制御系を設計すればよい。
- 近年、反応器など非線形性が強く、かつ高い制御性能を要求されるプロセスに対して、非線形モデルに基づくモデル予測制御の適用などが進められている。

## テイラー展開

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{x - x_0}{1!} + f^{(2)}(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$
$$+ f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \dots$$

↓ 2次以上の項を無視

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



$$A \frac{dL}{dt} = F_i - a\sqrt{L}$$



$$\sqrt{L} \approx \sqrt{\tilde{L}} + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{L}}}(L - \tilde{L})$$

$$A \frac{dL}{dt} = F_i - a\sqrt{\tilde{L}} - \frac{a}{2\sqrt{\tilde{L}}}(L - \tilde{L})$$

定常値からの変化量

$$\delta x = x - \tilde{x}$$

状態方程式の線形近似

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \approx f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})$$

定常状態

$$0 = \frac{d\tilde{x}}{dt} = f(\tilde{x})$$

$$\frac{d\delta x}{dt} = f'(\tilde{x})\delta x$$



定常値からの変化量  $\delta L = L - \tilde{L}$

物質収支式  $A \frac{dL}{dt} = F_i - a\sqrt{\tilde{L}} - \frac{a}{2\sqrt{\tilde{L}}}(L - \tilde{L})$

定常状態  $0 = \tilde{F}_i - a\sqrt{\tilde{L}}$

$$\begin{aligned} A \frac{d\delta L}{dt} &= \delta F_i - \frac{a}{2\sqrt{\tilde{L}}} \delta L \\ &= \delta F_i - \frac{\tilde{F}_i}{2\tilde{L}} \delta L \end{aligned}$$

$$A \frac{d\delta L}{dt} = \delta F_i - \frac{\tilde{F}_i}{2\tilde{L}} \delta L$$

$$AL \frac{d\delta T}{dt} = \tilde{F}_i(\delta T_i - \delta T) + \delta F_i(\tilde{T}_i - \tilde{T}) + \frac{\delta Q}{\rho c_p}$$

状態空間表現

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\tilde{F}_i}{2A\tilde{L}} & 0 \\ 0 & -\frac{\tilde{F}_i}{AL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{T}_i - \tilde{T}}{AL} & \frac{\tilde{F}_i}{AL} & \frac{1}{\rho c_p AL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta F_i \\ \delta T_i \\ \delta Q \end{bmatrix}$$

- プロセスモデルの構築
- ラプラス変換

- ラプラス変換の定義と基本特性

定義  $L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

線形性  $L[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$

合成積  $L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$

## ■ 微積分のラプラス変換

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) \quad \text{初期値がすべて0の場合}$$

$$L\left[\int_0^t \dots \int_0^t f(t) (dt)^n\right] = \frac{1}{s^n} F(s)$$

## ■ 指数関数のラプラス変換

$$L[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{dx}{dt} + ax = f(t), \quad x(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} b & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$\text{ラプラス変換} \quad sX(s) + aX(s) = F(s)$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{s+a}$$

$$\begin{aligned} \text{逆変換(合成積)} \quad x(t) &= \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) \end{aligned}$$

## ■ 移動定理

$$L[f(t-d)] = e^{-ds} F(s)$$

## ■ 最終値定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

$$\frac{dx}{dt} + ax = f(t), \quad x(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} b & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{b}{s} \quad X(s) = \frac{b}{s(s+a)}$$

## 最終値定理

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) & x(t) &= \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b}{s+a} = \frac{b}{a} & &= \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{7s+20}{s^3+7s^2+10s} = \frac{7s+20}{s(s+2)(s+5)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+2} + \frac{c}{s+5}$$

$s$  を掛けて  $s=0$  を代入

$$\frac{20}{2 \times 5} = \frac{a}{1} + \frac{b \times 0}{s+2} + \frac{c \times 0}{s+5}$$

$s+2$  を掛けて  $s=-2$  を代入

$$\frac{7(-2)+20}{(-2)(-2+5)} = \frac{a \times 0}{s} + \frac{b}{1} + \frac{c \times 0}{s+5}$$

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{-1}{s+2} + \frac{-1}{s+5}$$

項ごとに逆変換  $f(t) = 2 - e^{-2t} - e^{-5t}$

■ 宿題？

