プロセス制御工学

3. 伝達関数と過渡応答

京都大学　加納　学

Division of Process Control & Process Systems Engineering
Department of Chemical Engineering, Kyoto University

manabu@cheme.kyoto-u.ac.jp
http://www-pse.cheme.kyoto-u.ac.jp/~kano/

講義内容

- 伝達関数
- プロセスの過渡応答
- ブロック線図

伝達関数

3

線形微分方程式

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y$$
$$= b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

ラプラス変換

伝達関数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

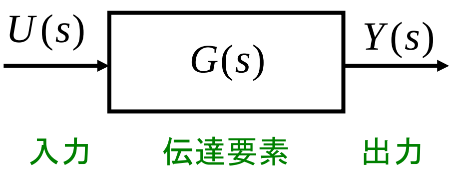
- 定常値からの変化量で表現，初期条件=0

伝達関数とブロック線図

4

伝達関数 $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$

ブロック線図



例題3．1

線形微分方程式
$$A\frac{d\delta L}{dt} = \delta F_i - \frac{\tilde{F}_i}{2\tilde{L}}\delta L$$

ラプラス変換

$$\left(As + \frac{\tilde{F}_i}{2\tilde{L}}\right)\delta L(s) = \delta F_i(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{\delta L(s)}{\delta F_i(s)} = \frac{\dfrac{2\tilde{L}}{\tilde{F}_i}}{\dfrac{2A\tilde{L}}{\tilde{F}_i}s+1}$$

１次遅れ
$$\frac{K}{Ts+1}$$

例題3．2

線形微分方程式

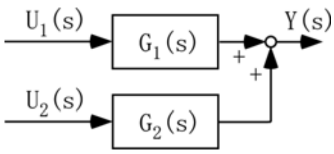
$$a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1\frac{du_1}{dt} + b_0u_1 + c_0u_2$$

ラプラス変換 $Y(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s)$

伝達関数

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U_1(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U_2(s)} = \frac{c_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$



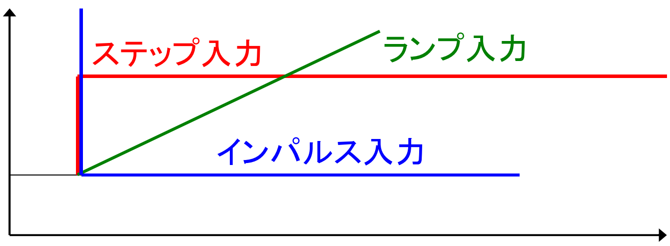
２入力１出力系

講義内容

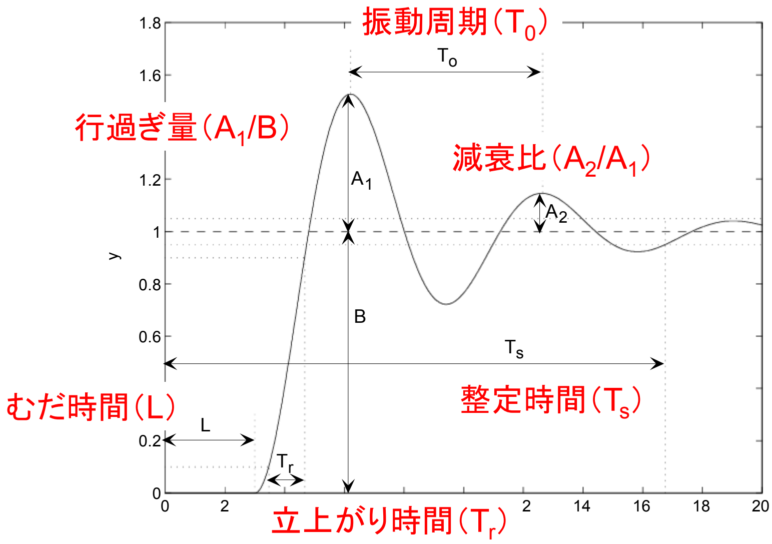
- 伝達関数
- プロセスの過渡応答
- ブロック線図

過渡応答

- 過渡応答
  入力の変化に対する出力の時間的変化



過渡応答の特徴

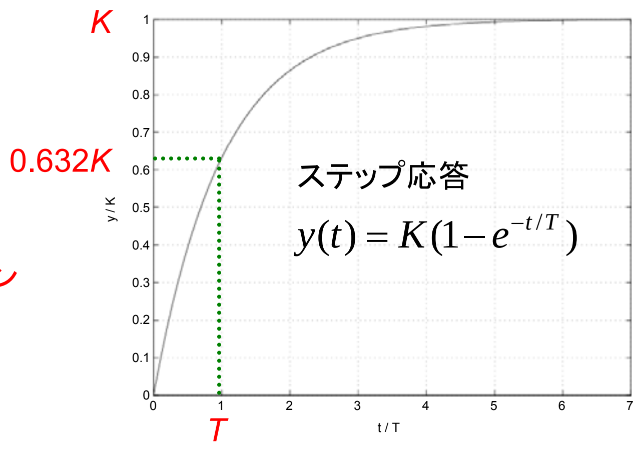


1次遅れ要素

1次遅れ要素

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

K　定常ゲイン
T　時定数



- 新しい定常状態における出力値はKである.
- 時定数Tに等しい時間が経過すると，出力の変化幅は最終的な変化幅の63.2%に達する.

例題3．3

11

伝達関数

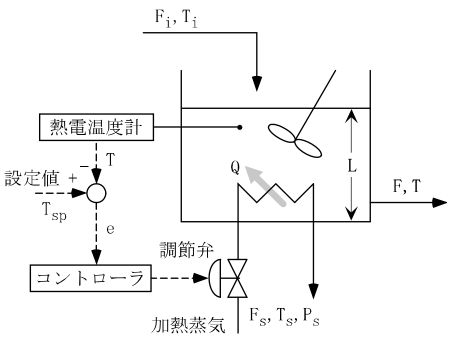
定常ゲイン

$$G(s)=\frac{\delta L(s)}{\delta F_i(s)}=\frac{\dfrac{2\tilde{L}}{\tilde{F}_i}}{\dfrac{2A\tilde{L}}{\tilde{F}_i}s+1}$$

時定数

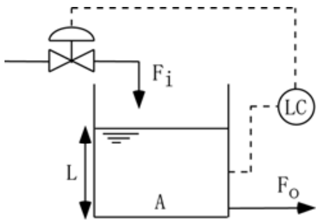
1次遅れ

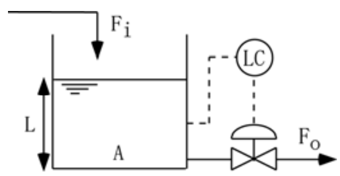
$$\frac{K}{Ts+1}$$



1次遅れ要素と積分要素

12





$$A\frac{dL}{dt}=F_i-a\sqrt{L}$$ 物質収支式 $$A\frac{dL}{dt}=F_i-F_o$$

$$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$$ 伝達関数 $$G(s)=\frac{K}{s}$$

1次遅れ要素　　　積分要素

積分要素

13

積分要素

$$G(s)=\frac{K}{s} \qquad y(t)=Kt$$

- 傾きKの直線となる.

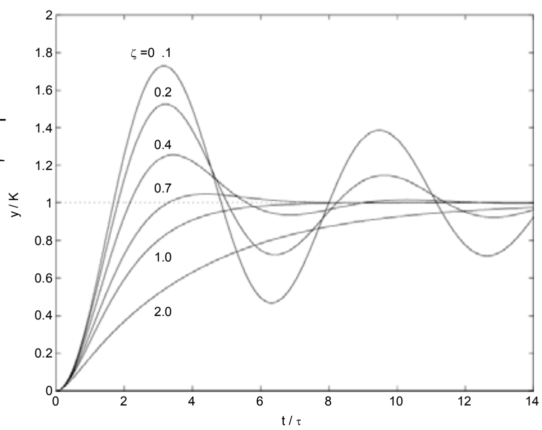
2次遅れ要素

14

2次遅れ要素

$$G(s)=\frac{K}{\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1}$$

K　定常ゲイン
ζ　減衰係数



- 新しい定常状態における出力値はKである.
- 振動する場合（ζ＜1）としない場合（ζ≧1）がある.

2次遅れ要素

2次遅れ要素 $G(s) = \dfrac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$

特性方程式 $\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = 0$

特性根（極） $s = \dfrac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$

$\zeta > 1$	共に負の実根	安定	非振動
$\zeta = 1$	負の重根	安定	非振動
$0 < \zeta < 1$	共に実部が負の複素根	安定	振動
$\zeta = 0$	共に虚根	安定限界	振動
$\zeta < 0$	実部が正の根が存在	不安定	ー

安定性と振動性

$$G(s) = \frac{K}{(s-p_1)(s-p_2)} \qquad p_1 = a + jb,\ p_2 = a - jb$$

$$G(s) = \frac{K}{s^2 - 2as + a^2 + b^2} = \frac{K}{b}\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

ラプラス逆変換

$$g(t) = \frac{K}{b}\underbrace{e^{at}}_{\text{安定性}}\ \underbrace{\sin bt}_{\text{振動性}}$$

安定性と振動性

17

$$G(s)=\frac{K}{(s-p_1)(s-p_2)} \qquad p_1=a+jb,\ p_2=a-jb$$

$$G(s)=\frac{K}{2jb}\left\{\frac{1}{s-(a+jb)}-\frac{1}{s-(a-jb)}\right\}$$

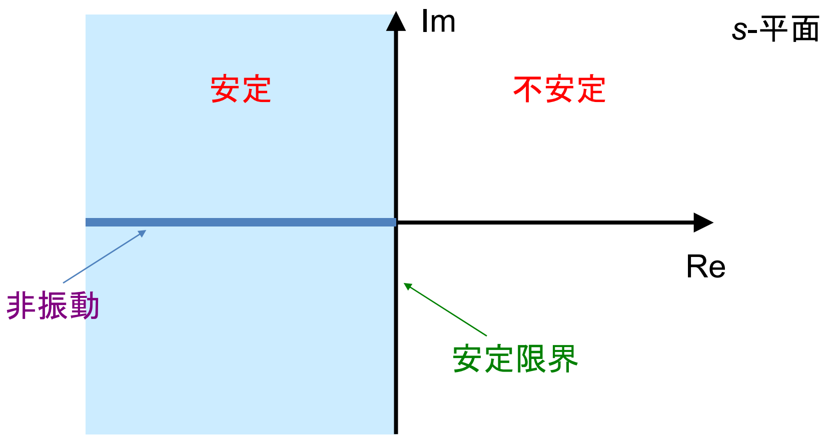
$$g(t)=\frac{K}{2jb}\left(e^{(a+jb)t}-e^{(a-jb)t}\right)$$

$$=\frac{K}{2jb}e^{at}\left\{(\cos bt+j\sin bt)-(\cos bt-j\sin bt)\right\}$$

$$=\frac{K}{b}e^{at}\sin bt$$

安定性と振動性

18



- すべての極の実部が負であれば，安定.
  1つでも実部が正の極があれば，不安定.
- すべての極が実数であれば，非振動.
  1つでも複素数の極があれば，振動.

例題3．4

2次遅れ要素 $G(s)=\dfrac{K}{\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1}$

特性方程式 $\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1=0$

特性根（極） $s=\dfrac{-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}}{\tau}$

むだ時間要素

むだ時間要素

$$G(s)=e^{-Ls}$$

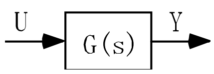
- 時間Lだけ，入力に対して出力が遅れる.

講義内容

- 伝達関数
- プロセスの過渡応答
- ブロック線図

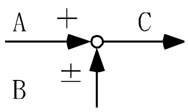
ブロック線図

伝達要素



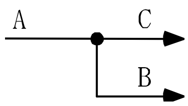
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

加え合わせ点



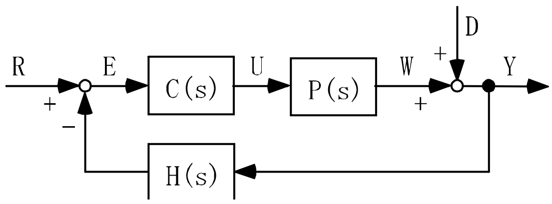
$$C(s) = A(s) \pm B(s)$$

引き出し点



$$A(s) = B(s) = C(s)$$

ブロック線図



$$Y = \frac{PC}{1+PCH}R + \frac{1}{1+PCH}D$$

閉ループ伝達関数 $\frac{PC}{1+PCH}$ $\frac{1}{1+PCH}$

開ループ（一巡）伝達関数 PCH

おわり

- 宿題？